Journal für die reine und angewandte Mathematik

DARTMOUTH COLLEGE
JAN 30 1962
LIBRARY

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Blaschke, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 208

Heft 3/4

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1961

Band 208. Heft 3/4

Inhaltsverzeichnis

Seite

Jacobinski, H., Verzweigungsgruppen und Verzweigungskörper 113

Rédei, Ladislaus, Eine Ergänzung zu meiner Arbeit über gruppentheoretische schiefe Produkte 144

Krzywoblocki, M. Z. v., On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. III. 145

Helmberg, Gilbert, Topologische Untergruppenräume. 164

Danzer, L., Über Durchschnittseigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien 181

Wunderlich, W., Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien 204

Einsendung von Druckmanuskripten erbeten an den Herausgeber:

Prof. Dr. H. Hasse, (24a) Ahrensburg bei Hamburg, Hagener Allee 35

Die Schriftleitung bittet, die Manuskripte in leserlicher Schrift, möglichst mit der Schreibmaschine, zu schreiben. Formeln sollten mit der Hand eingetragen sein. Es empfiehlt sich, den Manuskripten Anweisungen für den Setzer beizulegen, insbesondere die vorkommenden deutschen, griechischen, Antiqua- und sonstige besondere Typen durch farbige Unterstreichungen zu kennzeichnen, ebenso kursiven, gesperrten oder fetten Satz hervorzuheben. Für etwaige Figuren werden reproduktionsfähige Reinzeichnungen mit Tusche auf Pergamentpapier erbeten.

Die Herren Autoren erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos, weitere gegen Berechnung.

Einzelheiten über den Korrekturgang sind aus den Laufzetteln zu ersehen, die den Korrektursendungen beigefügt werden.

Verzweigungsgruppen und Verzweigungskörper.

Von *H. Jacobinski* in Stockholm.

Zu einem Primideal $\mathfrak{P}$ in einem relativ-galoisschen Zahlkörper K/k gehört nach Hilbert eine Reihe von Untergruppen der Galoisgruppe von K/k, nämlich die Zerlegungsgruppe Z, die Trägheitsgruppe T und die Verzweigungsgruppen V_i, wo V_{i+1} eine echte Untergruppe von V_i ist. Zu jeder Verzweigungsgruppe V_i gehört ein Verzweigungsexponent L_i derart, daß die Elemente von V_i die ganzen Zahlen in K genau modulo $\mathfrak{P}^{L_i}$ invariant lassen.

Der Hilbertschen Untergruppenreihe entspricht die aufsteigende Reihe der zugehörigen Invariantenkörper $k < K_Z < K_T < K_1 < \cdots < K_{s+1} = K$. Betrachtet man die durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideale in diesen Körpern, so gilt bekanntlich, daß das entsprechende Ideal in K_Z unverzweigt und vom ersten Grade über k ist, während in K_T/K_Z nur eine Graderhöhung und in K_1/K_T und K_{i+1}/K_i nur eine reine Verzweigung stattfindet. Weiter gilt die wichtige Tatsache, daß die Körper K_Z, K_T und K_1 auf bekannte Weise als maximale Unterkörper von K/k mit gegebenem Verhalten des entsprechenden durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideals charakterisiert sind. Für eine relativ-abelsche Erweiterung K/k hat Hasse [3], [4] auch für die höheren Verzweigungskörper eine direkte Charakterisierung mit Hilfe der Klassenkörpertheorie angegeben.

Um auch im allgemeinen Falle zu einer direkten Charakterisierung der höheren Verzweigungskörper zu kommen, braucht man ein Kriterium, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, ob ein gegebener, nicht notwendigerweise relativ-galoisscher Unterkörper Δ/k von K/k schon im Verzweigungskörper K_i/k liegt oder nicht. Dies legt es nahe, zu untersuchen, inwieweit sich die Hilbertsche Verzweigungstheorie auch auf nicht-galoissche Relativkörper Δ/k ausdehnen läßt.

Der grundlegende Begriff zur Definition der Verzweigungsgruppen in der Hilbertschen Theorie ist der Begriff des Verzweigungsexponenten. Wir betrachten diese Verzweigungsexponenten als Funktionen $e_{\mathfrak{P}}(g, K)$ der Elemente g der Galoisgruppe von K/k. Das Element g läßt dann alle ganzen Zahlen in K modulo $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(g, K)}$, aber nicht modulo einer höheren Potenz von $\mathfrak{P}$ invariant. Die Trägheitsgruppe und die Verzweigungsgruppen sind dann definiert als die Gesamtheit der Lösungen einer Ungleichung der Form

$$e_{\mathfrak{P}}(g, K) \geqq \nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Für $\nu = 1$ erhält man die Trägheitsgruppe, für $\nu > 1$ eine Verzweigungsgruppe.

Ganz analog kann man für einen beliebigen Unterkörper Δ/k von K/k einen Verzweigungsexponenten $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ von g in bezug auf Δ definieren. Das Element g erzeugt auf Δ einen Isomorphismus $\Delta \to \Delta^g$, und $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)}$ sei dann die höchste Potenz von $\mathfrak{P}$, nach der die ganzen Zahlen von Δ bei diesem Isomorphismus invariant bleiben. Die so

definierten Verzweigungsexponenten $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ im Unterkörper Δ stehen in einem einfachen Zusammenhang mit den Verzweigungsexponenten L_i von K/k, welcher in Satz I angegeben wird [1]). Ist speziell Δ/k ein relativ-galoisscher Unterkörper von K/k, so enthält Satz I die Resultate von Herbrand [6] über die Verzweigungsgruppen und -exponenten solcher Unterkörper. Verschiedene andere bekannte Resultate über die Verzweigungsexponenten relativ-galoisscher Körper können mit Hilfe von Satz I leicht bewiesen und verallgemeinert werden.

Um auch die Definition der Verzweigungsgruppen auf nicht-normale Körper Δ/k auszudehnen, betrachten wir die Lösungen g einer Ungleichung

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) \geqq \nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Es zeigt sich, daß diese Lösungen im allgemeinen keine Gruppe bilden. Enthält aber der Körper Δ den Zerlegungskörper K_Z von $\mathfrak{P}$ in K/k, so bilden die Lösungen der obigen Ungleichung für jedes ν eine Gruppe, und gewisse Teile der Hilbertschen Theorie lassen sich auf solche Körper Δ übertragen.

Mit Hilfe einer Umformung von Satz I läßt sich dann die gesuchte Charakterisierung der Verzweigungskörper angeben. Jedem Unterkörper Δ/k von K/k wird ein Ideal $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$, die $\mathfrak{P}$-Höhe von Δ/k, zugeordnet. Diese $\mathfrak{P}$-Höhe ist eine Potenz von $\mathfrak{P}$, welche durch die Verzweigungsexponenten $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ bestimmt ist. Es zeigt sich (Satz III), daß der Unterkörper Δ/k dann und nur dann im Verzweigungskörper K_i/k enthalten ist, wenn die $\mathfrak{P}$-Höhe von Δ/k Teiler der $\mathfrak{P}$-Höhe von K_i/k ist, und zwar wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ gleich der $\mathfrak{P}$-Höhe des kleinsten Verzweigungskörpers K_i/k, der Δ/k umfaßt. Jeder Verzweigungskörper K_i/k kann somit als maximaler Unterkörper gegebener $\mathfrak{P}$-Höhe in K/k charakterisiert werden.

Geht man von einer endlichen, nicht notwendigerweise normalen Erweiterung Δ/k aus, so kann man zu dieser direkt eine globale Höhe $\mathfrak{H}(\Delta/k)$ definieren. Diese ist ein Ideal, welches im allgemeinen nicht in Δ liegt. Ist K/k eine normale Erweiterung, die Δ/k umfaßt, und $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K, so wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ gleich dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{H}(\Delta/k)$. Es zeigt sich, daß die Höhe eines Kompositums zweier Körper gleich dem kleinsten gemeinsamen Multipel der Höhen der Komponenten ist. Hieraus ergibt sich die Existenz von Maximalkörpern gegebener Höhe in Δ/k. Ist insbesondere Δ/k relativ-galoissch, so sind diese Körper eine Verallgemeinerung der Verzweigungskörper.

Mit Hilfe der Charakterisierung der Verzweigungskörper durch die $\mathfrak{P}$-Höhen läßt sich auch das Kompositum K/k zweier relativ-galoisscher Körper Δ/k und Ω/k untersuchen. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal im Kompositum K/k, so fragt es sich, ob die Verzweigungsgruppen und -exponenten von $\mathfrak{P}$ in K/k durch die entsprechenden Daten der durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideale in Δ/k und Ω/k bestimmt sind. Es zeigt sich, daß dies nur der Fall ist, wenn die Menge der $\mathfrak{P}$-Höhen der Zwischenkörper in Δ/k kein Ideal außer dem Einsideal mit der entsprechenden Menge für Ω/k gemeinsam hat. Jeder Verzweigungskörper in K/k wird dann das Kompositum bestimmter Verzweigungskörper von Δ/k und Ω/k, und jede Verzweigungsgruppe von K/k wird direktes Produkt bestimmter Verzweigungsgruppen von Δ/k und Ω/k (Satz IV).

Die $\mathfrak{P}$-Höhen der verschiedenen Unterkörper einer normalen Erweiterung K/k stehen mit den Artinführern von K über dem Trägheitskörper K_T in Zusammenhang.

---

[1]) Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit bemerkte ich, daß *M. Krasner* in einer Note [C. R. Ac. Sci. Paris, **200** (1935)] eine andere Verallgemeinerung der Hilbertschen Verzweigungstheorie, allerdings ohne Beweise, angegeben hat. Das dortige Théorème 1 deckt sich dem Inhalt nach mit Satz I, ist aber in der Form komplizierter.

Es ergibt sich, daß die Verzweigungskörper K_i über K_T mit Hilfe dieser Führer charakterisiert werden können (Satz V). Ist insbesondere der Körper K/k relativ-abelsch, so ergeben sich hieraus die genannten Resultate von Hasse über die Charakterisierung der Verzweigungskörper eines relativ-abelschen Körpers. Weiter wird die Höhe eines relativ-abelschen Körpers K/k gleich dem endlichen Bestandteil des Führers von K über k.

Zum Abschluß benutzen wir noch Satz I zu einer genaueren Untersuchung relativ-zyklischer Körper von Primzahlgrad und geben einen vereinfachten Beweis der Sätze von Ore [7] über die sogenannten Normalkongruenzen.

Den Grundkörper k setzen wir in dieser Arbeit als einen endlich-algebraischen Zahlkörper voraus. Da wir nur endliche Erweiterungen des Grundkörpers betrachten, werden alle vorkommenden Körper endlich-algebraische Zahlkörper. Die benutzten Methoden sind jedoch auch auf andere Körper anwendbar. Doch soll auf Verallgemeinerungen in dieser Richtung hier nicht eingegangen werden.

Bezeichnungen. Wir denken uns das Primideal $\mathfrak{p}$ im Grundkörper k fest gewählt. p sei die durch $\mathfrak{p}$ teilbare rationale Primzahl. Bei der Untersuchung der Verzweigungsexponenten interessieren wir uns nur für $\mathfrak{p}$ und seine Primteiler in einem Oberkörper. Unter einer ganzen Zahl wollen wir daher eine für $\mathfrak{p}$ ganze Zahl verstehen, d. h. einen Bruch mit zu $\mathfrak{p}$ primem Nenner. Dies bedeutet, daß die einzigen Primideale in einer Erweiterung K/k die Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ von $\mathfrak{p}$ sind. Zerfällt insbesondere $\mathfrak{p}$ nicht in K/k, so wird jedes Ideal in K eine Potenz des Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K/k und Δ/k ein Zwischenkörper in K/k, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_\Delta$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in Δ. Ist analog Π $(= \Pi_K)$ eine ganze Zahl in K, welche durch $\mathfrak{P}$, aber nicht durch $\mathfrak{P}^2$ teilbar ist, so sei Π_Δ eine durch $\mathfrak{P}_\Delta$, aber nicht durch $\mathfrak{P}_\Delta^2$ teilbare ganze Zahl aus Δ.

Für zwei Ideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bedeute weiter

$$\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{P}}{\sim} \mathfrak{B},$$

daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch genau die gleiche Potenz $\mathfrak{P}^t$ von $\mathfrak{P}$ teilbar sind. $\mathfrak{P}^t$ heißt der Beitrag von $\mathfrak{P}$ (oder der $\mathfrak{P}$-Beitrag) zu $\mathfrak{A}$.

Die Elemente der Galoisgruppe G eines Körpers K/k betrachten wir als Linksoperatoren der Zahlen in K und schreiben $ga = a^g$ für $a \in K$, $g \in G$. Das neutrale Element der Galoisgruppe wird mit 1 bezeichnet.

1. Wir wollen jetzt die grundlegenden Tatsachen über die Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen, wie sie sich schon bei Hilbert finden, in Kürze zusammenfassen.

Sei k ein endlich algebraischer Zahlkörper und K/k eine relativ-galoissche Erweiterung endlichen Grades mit der Galoisgruppe G. Das Primideal $\mathfrak{p}$ von k sei verzweigt in K, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^E\mathfrak{Q}$, wo $\mathfrak{P}$ Primideal in K ist, und $E > 1$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (1)$. Die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Hilbertsche Untergruppenreihe wird dann bekanntlich wie folgt definiert. Die Zerlegungsgruppe Z besteht aus allen $g \in G$, die das Ideal $\mathfrak{P}$ in sich überführen. Die Trägheitsgruppe T besteht aus allen $g \in G$ derart, daß $a^g \equiv a$ $(\mathfrak{P})$ für jedes ganze $a \in K$ gilt. Die Verzweigungsgruppe V_1 besteht aus allen $g \in G$ mit $a^g \equiv a$ $(\mathfrak{P}^2)$ für alle ganzen $a \in K$. Der erste Verzweigungsexponent L_1 ist dann der höchste Exponent t, für den die Kongruenz $a^g \equiv a$ $(\mathfrak{P}^t)$ für alle $g \in V_1$ und alle ganzen $a \in K$ gilt. Die zweite Verzweigungsgruppe V_2 besteht aus allen $g \in G$ mit $a^g \equiv a$ $(\mathfrak{P}^{L_1+1})$ für alle ganzen $a \in K$. Der zweite Verzweigungsexponent L_2 ist der höchste Exponent t, so daß die Kongruenz $a^g \equiv a$ $(\mathfrak{P}^t)$ noch für alle $g \in V_2$ gilt. So fortfahrend erhält man die Reihe der Verzweigungsgruppen

und -exponenten, welche nach endlich vielen Schritten abbricht, $V_{s+1} = \{1\}$. Dann ist L_s der höchste Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}$ in K/k.

Der Index von Z in der Galoisgruppe G von K/k ist gleich der Anzahl der verschiedenen Primideale in K, die Teiler von $\mathfrak{p}$ sind. Die Gruppen T und V_i sind Normalteiler in Z. Die Elemente der Faktorgruppe Z/T erzeugen genau diejenigen Automorphismen des Restklassenkörpers $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ der ganzen Zahlen in K modulo $\mathfrak{P}$, welche die Restklassen festlassen, in denen Elemente aus k liegen. Die Faktorgruppe Z/T ist also zyklisch und die Ordnung dieser Gruppe ist gleich dem Relativgrad von $\mathfrak{P}$ über k.

Ist Π eine durch $\mathfrak{P}$, aber nicht durch $\mathfrak{P}^2$ teilbare ganze Zahl aus K, so wird für $g \in T$

$$g\Pi = \varrho_g \Pi, \text{ wo } \varrho_g \not\equiv 0 \ (\mathfrak{P}),\ \varrho_{g_1 g_2} \equiv \varrho_{g_1}\varrho_{g_2} \ (\mathfrak{P}).$$

Ordnet man jedem $g \in T$ die durch ϱ_g bestimmte Restklasse in $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ zu, so ergibt sich ein Homomorphismus von T mit einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der von Null verschiedenen Elemente in $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$. Dabei werden genau die Elemente von V_1 auf 1 abgebildet. Die Faktorgruppe T/V_1 ist also zyklisch. Ihre Ordnung E_0 ist ein Teiler der Ordnung $p^{f_0} - 1$ der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$, wo f_0 der Absolutgrad von $\mathfrak{P}$ ist. Insbesondere ist E_0 nicht durch p teilbar.

Ist $g \in V_i$, so wird

$$g\Pi = \Pi + \tau_g \Pi^{L_i} \quad \text{und} \quad \tau_{g_1 g_2} \equiv \tau_{g_1} + \tau_{g_2} \ (\mathfrak{P}). \ .$$

Hier ist dann und nur dann $\tau_g \equiv 0 \ (\mathfrak{P})$, wenn $g \in V_{i+1}$ ist. Ordnet man jedem $g \in V_i$ die durch τ_g bestimmte Restklasse in $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ zu, so wird V_i/V_{i+1} isomorph auf eine Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ abgebildet. Die Faktorgruppe V_i/V_{i+1} ist daher abelsch vom Typ $(p, p, \ldots, p)$ und ihre Ordnung ein Teiler von p^{f_0}. Hieraus ergibt sich, daß die Ordnung von V_i eine Potenz p^{r_i} von p ist.

Die Ordnung der Trägheitsgruppe T ist gleich der Verzweigungsordnung E von $\mathfrak{p}$ in K/k. Man hat also $E = E_0 p^{r_1}$. Ist die Verzweigungsordnung E nicht durch p teilbar, so sagt man, daß keine höhere Verzweigung vorkommt. Dies tritt genau dann ein, wenn $r_1 = 0$ ist, d. h. wenn die Verzweigungsgruppe V_1 nur aus dem Einselement besteht.

Der Zerlegungskörper K_Z ist der zu der Zerlegungsgruppe gehörige Invariantenkörper. Er ist charakterisiert als der maximale Zwischenkörper in K/k, in dem das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal unverzweigt und vom ersten Grade über k ist.

Der Trägheitskörper K_T ist der zur Trägheitsgruppe gehörige Invariantenkörper. Der Trägheitskörper ist charakterisiert als der maximale Zwischenkörper in K/k, in dem das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal unverzweigt über k ist.

Der Verzweigungskörper K_1 ist der zur Verzweigungsgruppe V_1 gehörige Invariantenkörper. Er ist charakterisiert als der maximale Zwischenkörper in K/k, in dem das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal ohne höhere Verzweigung ist.

Der Beitrag $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/k}$ von $\mathfrak{P}$ zur Differente von K/k kann explizit bestimmt werden. Zunächst ist $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/k} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/K_T}$, da in K_T/k das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal nicht verzweigt ist. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/K_T}$ gleich dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu der Differente einer genau durch $\mathfrak{P}$ teilbaren ganzen Zahl Π aus K ist. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/k} = \mathfrak{P}^{E - p^{r_1} + L_1(p^{r_1} - p^{r_2}) + \cdots + L_s(p^{r_s} - 1)},$$

wo V_{s+1} die erste Verzweigungsgruppe ist, die nur aus dem Einselement besteht.

Ist Ω ein Zwischenkörper in K/k und zwar Invariantenkörper zur Gruppe H, so sei Z', T', V_i' die Hilbertsche Untergruppenreihe von $\mathfrak{P}$ in K/Ω. Aus den Definitionen

folgt unmittelbar, daß $Z' = Z \cap H$, $T' = T \cap H$, $V_1' = V_1 \cap H$ ist. Die übrigen Verzweigungsgruppen V_i' sind die voneinander verschiedenen unter den Gruppen $V_i \cap H$.

2. Wir wollen jetzt die Definition der Verzweigungsexponenten auf nicht-normale Erweiterungen übertragen. Sei Δ/k ein beliebiger Zwischenkörper der normalen Erweiterung K/k, welcher zur Untergruppe H der Galoisgruppe G von K/k gehört. Für jedes $g \in G$ erzeugen die Zahlen $a^g - a$, wo a alle ganzen Zahlen in Δ durchläuft, ein Ideal $\mathfrak{E}(g, \Delta)$. Ist $g \notin H$, so hat dieses Ideal in K die Form $\mathfrak{P}^\varrho \mathfrak{Q}$, wo $\mathfrak{Q}$ nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Wir setzen dann $\mathfrak{P}^\varrho = \mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ und $\varrho = e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$. Es ist offenbar $e_\mathfrak{P}(g, K) = L_i$, wenn g in V_i, aber nicht in V_{i+1} liegt.

Für $g \in H$ ist $\mathfrak{E}(g, \Delta)$ gleich dem Nullideal. Wir setzen dann der Vollständigkeit halber $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) = (0)$ und $e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = +\infty$.

$e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ heiße der ($\mathfrak{P}$-)Verzweigungsexponent von g in Δ. Von Verzweigungsexponenten schlechthin sprechen wir nur im Falle eines relativ-galoisschen Körpers, und dann sind diese Exponenten immer bezogen auf ein Primideal dieses Körpers. Ist also Δ/k ein relativ-galoisscher Unterkörper von K/k und $\mathfrak{P}_\Delta$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in Δ, so sind die Verzweigungsexponenten von Δ/k die Zahlen $e_{\mathfrak{P}_\Delta}(g, \Delta)$.

Die Verzweigungsexponenten $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ sind für $g \notin H$ ganze nicht-negative Zahlen. Sie hängen nicht eigentlich von g, sondern nur von dem von g auf Δ erzeugten Isomorphismus $\Delta \to \Delta^g$ ab. Da alle Elemente einer Nebenklasse gH den gleichen Isomorphismus auf Δ erzeugen, sind die Verzweigungsexponenten $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ also nur Funktionen dieser Nebenklassen.

Weiter sind die Verzweigungsexponenten $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ nicht durch Δ/k allein bestimmt, denn sie sind ja bezogen auf ein Primideal des relativ-galoisschen Oberkörpers K/k. Geht man also von einer nicht normalen Erweiterung Δ/k aus, so hat man diese zunächst in eine normale Erweiterung K/k einzubetten, wonach man für die Primideale $\mathfrak{P}$ von K die Verzweigungsexponenten $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ bestimmen kann. Ist $\overline{K}/k$ die kleinste normale Erweiterung, welche Δ/k umfaßt und $\overline{\mathfrak{P}}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in $\overline{K}$, so folgt direkt aus der Definition

$$e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = E_{\overline{K}} e_{\overline{\mathfrak{P}}}(g, \Delta)$$

wo $E_{\overline{K}}$ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}$ in $K/\overline{K}$ ist. Bettet man also Δ/k in eine andere relativ-galoissche Erweiterung K'/k mit der Gruppe G' ein, so lassen sich die Verzweigungsexponenten der Elemente $g' \in G'$ in Δ hieraus leicht berechnen.

Die Verzweigungsexponenten $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ lassen sich durch die Verzweigungsexponenten von $\mathfrak{P}$ in K/k ausdrücken. Wir werden beweisen

Satz I. *Ist H eine Untergruppe der Galoisgruppe G von K/k und Δ der zu H gehörige Invariantenkörper, so gilt für jedes $g \in G$*

$$e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = \sum_{h \in H} e_\mathfrak{P}(gh, K).$$

Ist etwas allgemeiner Ω ein Körper zwischen Δ und K, so kann man nach dem Zusammenhang der $e_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ mit den $e_\mathfrak{P}(g, \Omega)$ fragen. Dieser Zusammenhang wird gegeben durch

Satz I'. *Seien $U < H < G$ zwei Untergruppen der Galoisgruppe G von K/k und sei*

$$H = h_1 U + h_2 U + \cdots$$

eine Zerlegung von H in Nebenklassen nach U. Sind dann Ω und Δ die zu U resp. H gehörigen Invariantenkörper, so gilt für jedes $g \in G$

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \sum_i e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega).$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz I und ist also mit diesem äquivalent. Denn nach Satz I wird

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \sum_i \sum_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(gh_i u, K),$$

$$e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega) = \sum_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(gh_i u, K)$$

und also

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \sum_i e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega).$$

Der Beweis von Satz I ist trivial, wenn g in H liegt. Denn dann wird $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = +\infty$ und in der Summe rechts kommen das Glied $e_{\mathfrak{P}}(1, K) = +\infty$ und sonst nur endliche Glieder vor. Für $g \notin H$ reduzieren wir zunächst in **3** den Beweis auf den Fall, daß der Grundkörper k mit dem ersten Verzweigungskörper K_1 identisch ist. Der Beweis von Satz I in diesem Falle läuft dann hinaus auf den Beweis von Satz I′ für den Fall, daß Ω relativ-zyklisch von Primzahlgrad über Δ ist. Diesen Beweis werden wir in **4** geben.

3. Wir wollen jetzt zuerst den Beweis von Satz I auf den Fall zurückführen, daß der Grundkörper k mit dem Trägheitskörper K_T identisch ist, d. h. daß die Galoisgruppe G von K/k mit der Trägheitsgruppe T identisch ist. Wir zeigen zunächst, daß man sich auf $g \in T$ beschränken kann.

Ist wieder H die zu Δ gehörige Gruppe und $g \in G$, so erzeugen alle Elemente der Nebenklasse gH den gleichen Isomorphismus von Δ. Ist dann der Isomorphismus $\Delta \to \Delta^g$ nicht durch ein Element der Trägheitsgruppe T erzeugbar, so muß $gH \cap T = \emptyset$ sein. In Satz I werden dann aber alle $e_{\mathfrak{P}}(gh, K)$ gleich Null, und wir haben also zu zeigen: *Ist $gH \cap T = \emptyset$, so wird $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = 0$.*

Das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal $\mathfrak{P}_\Delta$ in Δ ist in K von der Form

$$\mathfrak{P}_\Delta = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_m)^{E_\Delta}, \quad \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_l \text{ für } i \neq l,$$

wo $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ gesetzt ist. Die Ideale $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \ldots, m$ sind dann die verschiedenen Konjugierten von $\mathfrak{P}$ bei H, also $\mathfrak{P}_i = h_i \mathfrak{P}$, $h_i \in H$. Ist dann zuerst das Ideal $g^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ von allen $\mathfrak{P}_i$ verschieden, so sei $\mathfrak{P}'_\Delta$ das durch $\mathfrak{P}'$ teilbare Primideal in Δ. Die Ideale $\mathfrak{P}_\Delta$ und $\mathfrak{P}'_\Delta$ sind relativ prim und es gibt also ganze Zahlen a in Δ mit

$$a \equiv 0 \ (\mathfrak{P}_\Delta)$$
$$a \equiv 1 \ (\mathfrak{P}'_\Delta) \ .$$

Dann wird $a^g \equiv 1 \ (g\mathfrak{P}'_\Delta)$, und da $\mathfrak{P}$ Teiler von $g\mathfrak{P}'_\Delta$ ist, wird $a^g - a \equiv 1 \ (\mathfrak{P})$ und somit $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = 0$.

Ist dann aber das Ideal $g^{-1}\mathfrak{P}$ gleich einem der $\mathfrak{P}_i$, also $g^{-1}\mathfrak{P} = h_i \mathfrak{P}$, so muß das Element gh_i in der Zerlegungsgruppe Z liegen. Da alle Elemente der Nebenklasse gH den gleichen Isomorphismus von Δ erzeugen, kann man durch Änderung der Bezeichnungen von vornherein voraussetzen, daß g in Z liegt.

Das Element g erzeugt dann einen Automorphismus des Restklassenkörpers $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ der ganzen Zahlen in K modulo $\mathfrak{P}$. Der Restklassenkörper $\mathfrak{o}_\Delta/\mathfrak{P}_\Delta$ der ganzen Zahlen in Δ modulo $\mathfrak{P}_\Delta$ kann dann mit einem Unterkörper von $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ identifiziert werden, nämlich mit dem Körper derjenigen Restklassen, welche Elemente aus Δ enthalten. Läßt dann g

diesen Unterkörper nicht elementweise invariant, so gibt es ein $a \in \mathfrak{o}_\Delta$ mit $a^g - a \not\equiv 0\ (\mathfrak{P})$ und also $e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = 0$. Läßt aber g — und damit auch g^{-1} — den Unterkörper $\mathfrak{o}_\Delta/\mathfrak{P}_\Delta$ elementweise invariant, so erzeugt g^{-1} einen Automorphismus von $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}_\Delta/\mathfrak{P}_\Delta$. Jeder solche Automorphismus wird aber schon erzeugt von einem Element der Gruppe von K/Δ, d. h. von einem Element $h \in H$. Das Element $h^{-1}g^{-1}$ läßt dann den Körper $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ elementweise invariant und liegt also in der Trägheitsgruppe T. Der Durchschnitt $gH \cap T$ ist dann nicht leer, womit die Behauptung oben bewiesen ist.

Wir setzen also jetzt $g \in T$ voraus und zeigen, daß man sich auf den Fall $H < T$ beschränken kann. Ist Π_Δ eine durch $\mathfrak{P}_\Delta$, aber nicht durch $\mathfrak{P}_\Delta^2$ teilbare ganze Zahl aus Δ, so können die ganzen Zahlen von Δ modulo einer beliebig hohen Potenz $\mathfrak{P}^M$ in der Form

$$a \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \Pi_\Delta + \alpha_2 \Pi_\Delta^2 + \cdots (\mathfrak{P}^M)$$

dargestellt werden, wo die ganzen Zahlen α_i im Trägheitskörper von K/k liegen und also bei g invariant bleiben. Es ist

$$(g - 1)\, a \equiv \alpha_1 (\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta) + \alpha_2 \left((\Pi_\Delta^g)^2 - \Pi_\Delta^2\right) + \cdots (\mathfrak{P}^M).$$

Hier ist offenbar das erste Glied durch eine niedrigere Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar als die übrigen und also

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} (\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta).$$

Ist dann Δ' ein Oberkörper von Δ derart, daß $\mathfrak{P}_{\Delta'}$ in Δ'/Δ nicht verzweigt ist, so kann $\Pi_\Delta = \Pi_{\Delta'}$ gewählt werden und also $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) = \mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta')$. Speziell sei $H' = H \cap T$ und Δ' der zu H' gehörige Invariantenkörper. H' ist gerade die Trägheitsgruppe von K/Δ, und also ist $\mathfrak{P}_{\Delta'}$ unverzweigt in Δ'/Δ und $e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = e_\mathfrak{P}(g, \Delta')$.

Sei nun Satz I für jeden Körper zwischen K und dem Trägheitskörper K_T von K schon bewiesen. Dann gilt er für den obigen Körper Δ' und es ist

$$e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = e_\mathfrak{P}(g, \Delta') = \sum_{h \in H'} e_\mathfrak{P}(gh, K).$$

Die Summe rechts ändert sich aber nicht, wenn h ganz H statt nur $H \cap T$ durchläuft, denn die hinzukommenden Glieder sind wegen $g \in T$ alle gleich Null, und also gilt

$$e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = \sum_{h \in H} e_\mathfrak{P}(gh, K).$$

Der Beweis von Satz I ist damit auf den Fall $G = T$ zurückgeführt. Um diesen Beweis weiter auf den Fall $G = V_1$ zu reduzieren, benötigen wir zwei Hilfssätze. Hier wäre es ausreichend, diese unter der Voraussetzung $G = T$ zu beweisen. Für spätere Anwendungen beweisen wir aber Lemma 1 ohne diese Einschränkung.

Lemma 1. *Ist Δ/k ein beliebiger Unterkörper von K/k und ist $g_1 \in Z$, $g_2 \in G$, so ist*

$$e_\mathfrak{P}(g_1 g_2, \Delta) \geqq \min\left(e_\mathfrak{P}(g_1, \Delta),\ e_\mathfrak{P}(g_2, \Delta)\right),$$

wo das Gleichheitszeichen sicher für $e_\mathfrak{P}(g_1, \Delta) \neq e_\mathfrak{P}(g_2, \Delta)$ gilt.

Denn lassen g_1 und g_2 alle ganzen Zahlen in Δ modulo $\mathfrak{P}^M$ invariant, so gilt dies wegen $g_1 \in Z$ auch von dem Produkt $g_1 g_2$, womit die Ungleichung bewiesen ist. Der Zusatz über das Gleichheitszeichen ist auch klar. Denn läßt einer der beiden Isomorphismen die ganzen Zahlen in Δ modulo $\mathfrak{P}^M$ invariant, der andere aber nicht, so kann $g_1 g_2$ diese Zahlen nicht modulo $\mathfrak{P}^M$ invariant lassen.

Lemma 2. *Ist der Grundkörper k gleich dem zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Trägheitskörper in K/k, und ist Δ/k Unterkörper von $\Omega/k < K/k$ mit dem Relativgrad $(\Omega : \Delta) = r$, so ist*

$$\mathfrak{P}_\Omega^{r-1} \mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Omega) \,/\, \mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta).$$

Denn sei

$$\Pi_\Delta \equiv \alpha_0 \Pi_\Omega^r + \alpha_1 \Pi_\Omega^{r+1} + \cdots \quad (\mathfrak{P}^M),$$

wo die α_i ganze Zahlen aus k sind. Die Zahl $(g-1)\,\Pi_\Delta$ besteht dann modulo $\mathfrak{P}^M$ aus Gliedern der Form

$$(g-1)\,\Pi_\Omega^\varrho = (\Pi_\Omega^g - \Pi_\Omega)\,\left((\Pi_\Omega^g)^{\varrho-1} + \cdots + \Pi_\Omega^{\varrho-1}\right), \quad \varrho \geqq r,$$

welche alle auf jeden Fall durch $\mathfrak{P}_\Omega^{r-1}\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Omega)$ teilbar sind.

Setzen wir $\Omega = K$ in Lemma 2 und nehmen wir für g ein Element der Verzweigungsgruppe V_1, so wird wegen $e_\mathfrak{P}(g, K) \geqq 2$ das Ideal $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, K)$ durch $\mathfrak{P}^2$ teilbar. Das Ideal $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ wird dann nach dem Lemma durch $\mathfrak{P}^{r+1}$ teilbar, wo $r = (K : \Delta)$ ist. Wegen der Voraussetzung $G = T$ ist $\mathfrak{P}$ rein verzweigt in K/Δ und also $\mathfrak{P}^r = \mathfrak{P}_\Delta$. Dies ergibt:

Korollar. *Ist der Grundkörper k gleich dem Trägheitskörper zu $\mathfrak{P}$ in K/k und ist g ein Element der Verzweigungsgruppe V_1, so wird für einen beliebigen Unterkörper Δ/k von K/k das Ideal $\mathfrak{P}_\Delta$ ein echter Teiler von $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta)$.*

Erzeugt nun das Element $g \in T$ einen Isomorphismus von Δ, der sich nicht durch ein Element der Verzweigungsgruppe darstellen läßt, so ist $gH \cap V_1 = \emptyset$. Dann liegt g auch nicht in der kleinsten H und V_1 umfassenden Gruppe U. Denn V_1 ist Normalteiler in T und die Elemente von U haben die Form vh, $v \in V_1$, $h \in H$. Ist Σ/k der zu U gehörige Invariantenkörper, so wird $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Sigma) = \mathfrak{P}_\Sigma$. Denn Σ/k ist Unterkörper des Verzweigungskörpers K_1/k, welcher relativ-zyklisch und ohne höhere Verzweigung ist. Also ist auch Σ/k relativ-zyklisch und besitzt keine höhere Verzweigung, d. h. es ist $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Sigma) = \mathfrak{P}_\Sigma$. Nach Lemma 2 ist dann $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta)\,\mathfrak{P}_\Delta^{r-1}$ Teiler von $\mathfrak{P}_\Sigma$, wo $r = (\Delta : \Sigma)$ ist. Wegen $\mathfrak{P}_\Sigma = \mathfrak{P}_\Delta^r$ ist also $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta)$ Teiler von $\mathfrak{P}_\Delta$. Da andererseits $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) = (\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta)$ offenbar durch $\mathfrak{P}_\Delta$ teilbar ist, folgt $\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) = \mathfrak{P}_\Delta$. Man hat also:

Ist $gH \cap V_1 = \emptyset$, so ist $e_\mathfrak{P}(g, \Delta) = (K : \Delta)$.

Hieraus ergibt sich Satz I für $gH \cap V_1 = \emptyset$; denn dann werden wegen $H < T = G$ alle $e_\mathfrak{P}(gh, K) = 1$ und $\sum_{h \in H} e_\mathfrak{P}(gh, K) = (K : \Delta)$.

Wir können uns also auf $g \in V_1$ beschränken. Sei dann $U = H \cap V_1$. Der zu U gehörige Invariantenkörper Ω ist dann gerade der Verzweigungskörper von K/Δ, und also ist $(\Omega : \Delta) = r \not\equiv 0\ (\mathfrak{P})$. Ist dann für $M > r$

$$\Pi_\Delta \equiv \alpha_0 \Pi_\Omega^r + \alpha_1 \Pi_\Omega^{r+1} + \cdots \quad (\mathfrak{P}^M),$$

wo die α_i ganze Zahlen aus k sind, so wird

$$(g-1)\,\Pi_\Delta \equiv \alpha_0 (g-1)\,\Pi_\Omega^r \quad (\mathfrak{P}_\Omega^r \mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Omega));$$

denn $(\Pi_\Omega^g)^n - (\Pi_\Omega)^n$ ist durch $\mathfrak{P}_\Omega^{n-1}\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Omega)$ teilbar. Setzt man

$$g\,\Pi_\Omega = \Pi_\Omega + \tau \Pi^\varrho,$$

wo $\varrho = e_\mathfrak{P}(g, \Omega)$ und τ eine ganze, nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbare Zahl aus K ist, so kommt

$$(g-1)\,\Pi_\Omega^r = \tau r \Pi_\Omega^{r-1} \Pi^\varrho + \binom{r}{2} \tau^2 \Pi_\Omega^{r-2} \Pi^{2\varrho} + \cdots.$$

Nach dem Korollar zu Lemma 2 wird $\mathfrak{P}_\Omega$ ein echter Teiler von $\mathfrak{P}^\varrho$, und also wird das erste Glied oben durch eine niedrigere Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar als die übrigen. Dies ergibt

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Delta) = \mathfrak{P}_\Omega^{r-1}\,\mathfrak{E}_\mathfrak{P}(g, \Omega)$$

und

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) + (r-1)\ (K:\Omega)$$
$$= e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) + \sum_{\substack{h \in H \\ h \notin U}} e_{\mathfrak{P}}(gh, K);$$

denn in der Summe werden alle Glieder gleich Eins, da gh in T, aber nicht in V_1 liegt. Zum Beweis von Satz I ist also noch zu zeigen, daß $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = \sum_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(u, K)$ ist. Der Körper Ω umfaßt aber den Verzweigungskörper K_1. Damit ist der Beweis von Satz I auf den Fall zurückgeführt, daß der Verzweigungskörper K_1 gleich dem Grundkörper k ist.

4. Wir setzen also jetzt $G = V_1$ voraus. Sei p die durch $\mathfrak{P}$ teilbare rationale Primzahl. Die Verzweigungsgruppe V_1 ist eine p-Gruppe und jede Untergruppe $H < V_1$ somit auflösbar. Die Faktorgruppen in einer Kompositionsreihe

$$\{1\} < H_1 < H_2 < \cdots < H_m = H$$

werden zyklisch vom Grade p. Dieser Kompositionsreihe entspricht eine Körperreihe

$$K > K^1 > K^2 > \cdots > K^m = \Delta,$$

wo jeder Körper in bezug auf den folgenden relativ zyklisch vom Grade p ist. Daher reicht es, Satz I′ für den Fall eines relativ zyklischen Unterkörpers vom Grade p zu beweisen, denn dann folgt Satz I durch sukzessive Anwendung auf die K^i/K^{i+1}.

Sei also H eine Untergruppe von $G = V_1$ und U ein Normalteiler von H, so daß H/U zyklisch vom Grade p ist, und sei $1, h, h^2, \ldots, h^{p-1}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H nach U. Sind Δ und Ω die zu H resp. U gehörigen Körper, so haben wir für $g \in V_1$ zu beweisen:

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \sum_{i=0}^{p-1} e_{\mathfrak{P}}(gh^i, \Omega)\,. \tag{1}$$

Dazu benötigen wir einige Hilfssätze.

Lemma 3. *Liegen g_1 und g_2 in V_1 und ist*

$$e_{\mathfrak{P}}(g_1, K) + e_{\mathfrak{P}}(g_2, K) > L_i + 1,$$

so kommutieren g_1 und g_2 in V_1/V_{i+1}.

Denn ist $\mathfrak{o}$ die Maximalordnung von K, so ergibt der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}^{L_i+1}$ eine treue Darstellung von V_1/V_{i+1}, d. h. wenn $g_1 a \equiv g_2 a\ (\mathfrak{P}^{L_i+1})$ für alle $a \in \mathfrak{o}$ gilt, so ist $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$, wo $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ die entsprechenden Klassen in V_1/V_{i+1} sind. Nun ist

$$(1 - g_1)\, a \equiv 0\ (\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(g_1, K)}).$$

Ist aber ein $b \in \mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{P}^s$ teilbar, so sieht man leicht, daß $(1 - g_2)\, b$ auf jeden Fall durch $\mathfrak{P}^{s + e_{\mathfrak{P}}(g_2, K) - 1}$ teilbar ist. Also gilt

$$(1 - g_2)\ (1 - g_1)\, a \equiv 0\ (\mathfrak{P}^{L_i+1})$$

und

$$g_2 g_1 a \equiv g_1 a + g_2 a - a\ (\mathfrak{P}^{L_i+1})$$

für alle $a \in \mathfrak{o}$. Da die rechte Seite nicht von der Reihenfolge von g_1 und g_2 abhängt, folgt

$$g_2 g_1 a \equiv g_1 g_2 a\ (\mathfrak{P}^{L_i+1})$$

und daher $\bar{g}_1 \bar{g}_2 = \bar{g}_2 \bar{g}_1$.

Aus Lemma 3 folgt der Satz von Speiser [8], [1], daß V_i/V_{i+1} im Zentrum von V_1/V_{i+1} liegt. Denn ist $g_1 \in V_i$, $g_2 \in V_1$, so wird $e_{\mathfrak{P}}(g_1, K) + e_{\mathfrak{P}}(g_2, K) \geqq L_i + 2$.

Ist das Ideal (p) genau durch $\mathfrak{P}^t$ teilbar, so setzen wir $\mathfrak{l} = \mathfrak{P}^{\frac{t}{p-1}}$. Das Ideal $\mathfrak{l}$ liegt dann eventuell in einem Oberkörper von K, z. B. in dem Kompositum von K und dem Körper der p-ten Einheitswurzeln.

Lemma 4. *Läßt der Isomorphismus g den Unterkörper Δ nicht elementweise invariant, so ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ ein Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Delta$.*

Sei g in der Nebenklasse gH so gewählt, daß g in der höchstmöglichen Verzweigungsgruppe V_i liegt, d. h. $gH \cap V_{i+1} = \emptyset$. Dann liegt g auch nicht in der von H und V_{i+1} erzeugten Gruppe $H' = (H, V_{i+1})$. Denn die Elemente dieser Gruppe sind von der Form vh mit $v \in V_{i+1}$ und $h \in H$. Nach Lemma 3 wird dann H' Normalteiler in $H'' = (H', g)$, und zwar ist $(H'' : H') = p$. Sind Δ' und Δ'' die zu H' resp. H'' gehörigen Invariantenkörper, so wird Δ' zyklisch vom Grade p über Δ'' mit g als erzeugendem Element der Relativgruppe. Nach Lemma 2 ist das Ideal $\mathfrak{P}_{\Delta'}^{r-1}\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ Teiler von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta')$, wo $r = (\Delta : \Delta')$ ist. Wegen $\mathfrak{P}_{\Delta'} = \mathfrak{P}_\Delta^r$, reicht es also, zu zeigen, daß $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta')$ Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_{\Delta'}$ ist, d. h. es reicht, Lemma 4 für den relativ-zyklischen Körper Δ'/Δ'' vom Grade p zu beweisen. Dies ist aber ein bekanntes Resultat [8], [2], wofür wir hier einen anderen Beweis geben. Ist L der Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}_{\Delta'}$ in Δ'/Δ'', so wird $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta') = \mathfrak{P}_{\Delta'}^L$. Die Relativdifferente von Δ'/Δ'' ist dann gleich $\mathfrak{P}_{\Delta'}^{(p-1)L}$. Die Relativspuren der Zahlen des Ideals $\mathfrak{P}_{\Delta'}^L$ erzeugen genau das Ideal $\mathfrak{P}_{\Delta'}^{pL} = \mathfrak{P}_{\Delta''}^L$. Ist $L = pm - \mu$, wo m und μ ganze Zahlen sind, und $0 \leqq \mu \leqq p-1$, so enthält $\mathfrak{P}_{\Delta'}^L$ ein genau durch $\mathfrak{P}_{\Delta''}^m$ teilbares Element $b \in \Delta''$. Die Relativspur pb von b ist genau durch $p\mathfrak{P}_{\Delta''}^m$ teilbar. Wegen $\mu \leqq p-1$ folgt hieraus $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta')^{p-1} \mid p\mathfrak{P}_{\Delta'}^{p-1}$, und also ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta')$ Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_{\Delta'}$.

Anmerkung. Lemma 4 gilt auch ohne die Voraussetzung, daß der Grundkörper k mit dem ersten Verzweigungskörper K_1 identisch ist. Denn ist $gH \cap V_1 = \emptyset$, so wird $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ sogar Teiler von $\mathfrak{P}_\Delta$. Seien also $g \in V_1$ und $H^{(0)} = H \cap T$, $H^{(1)} = H \cap V_1$ und $\Delta^{(0)}$ und $\Delta^{(1)}$ die entsprechenden Invariantenkörper mit $(\Delta^{(1)} : \Delta^{(0)}) = t$. Dann wird $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta^{(0)}) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta^{(1)})\, \mathfrak{P}_{\Delta^{(1)}}^{t-1}$. Nach Lemma 4 ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta^{(1)}) \mid \mathfrak{l}\mathfrak{P}_{\Delta^{(1)}}$. Da $\mathfrak{P}_{\Delta^{(1)}}^t$ Teiler von $\mathfrak{P}_\Delta$ ist, wird $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Delta$, wie behauptet.

Sei nun mit den Bezeichnungen von (1) der Körper Ω relativ-zyklisch vom Grade p über Δ. Die Elemente Π_Δ und Π_Ω wollen wir so wählen, daß

$$\frac{\Pi_\Delta}{\Pi^{(K:\Delta)}} \equiv \frac{\Pi_\Omega}{\Pi^{(K:\Omega)}} \equiv 1 \quad (\mathfrak{P})$$

ist. Modulo einer beliebig hohen Potenz $\mathfrak{P}^M$ ist dann Π_Δ ein Polynom in Π_Ω in dem Π_Ω^p das Glied niedrigsten Grades ist. Wir wollen $\mathfrak{F}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = (\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta)$ durch Untersuchung von $\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta$ modulo einer genügend hohen Potenz $\mathfrak{P}^M$ bestimmen. Nach Lemma 4 reicht es, wenn $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Delta$ Teiler von $\mathfrak{P}^M$ ist. Wir setzen

$$\Pi_\Delta \equiv A + B \equiv (\Pi_\Omega^p + \cdots) + (\alpha\Pi_\Omega^n + \cdots) \quad (\mathfrak{P}^M), \tag{2}$$

wo in den Klammern A und B sämtliche Glieder mit durch p teilbarem resp. nicht teilbarem Exponenten zusammengefaßt sind. $\mu > p$ ist der kleinste nicht durch p teilbare Exponent, und α sowie die übrigen Koeffizienten sind ganze Zahlen aus k, die aus einem festen Repräsentantensystem modulo $\mathfrak{p}$ gewählt sind. — Für eine beliebige ganze Zahl β aus K sei $\beta \equiv \bar{\beta}$ $(\mathfrak{P})$, wo $\bar{\beta}$ in dem Repräsentantensystem liegt. Weiter sei für $g \notin U$

$$g\Pi_\Omega = \Pi_\Omega + \tau_g \Pi^{q_g},$$

wo τ_g eine ganze, nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbare Zahl aus K und $\varrho_g = e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)$ ist. Für ein erzeugendes Element h der Relativgruppe von Ω nach Δ liegt $h\Pi_\Omega$ wieder in Ω, also ist

$$h\Pi_\Omega = \Pi_\Omega + \tau_h \Pi^{\varrho_h} = \Pi_\Omega + \sigma \Pi_\Omega^L,$$

wo σ schon in Ω liegt. Wegen $\frac{\Pi_\Omega}{\Pi^{(K:\Omega)}} \equiv 1\ (\mathfrak{P})$ ist $\bar{\tau}_h = \bar{\sigma}$.

Wir beweisen nun

Lemma 5. *Es ist mit den obigen Bezeichnungen*[2])

$$\Pi_\Delta \equiv (\Pi_\Omega^p + \cdots) + (\alpha \Pi_\Omega^{(p-1)L+1} + \cdots) \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^p)$$

und

$$\Pi_\Delta^g - \Pi_\Delta \equiv (\bar{\tau}_g^p \Pi^{p\varrho_g} + \cdots) - (\bar{\tau}_h^{p-1} \bar{\tau}_g \Pi_\Omega^{(p-1)L} \Pi^{\varrho_g} + \cdots) \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^{p-1} \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)),$$

wo in dem Fall, daß das Glied $\alpha \Pi_\Omega^{(p-1)L+1}$ nicht modulo $p\mathfrak{P}_\Omega^p$ verschwindet, die Zahl α aus k modulo $\mathfrak{p}$ bestimmt ist durch

$$\bar{\tau}_h^{p-1} + \alpha(1 - L) \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Mit den Bezeichnungen in (2) wird

$$(g - 1)\, \Pi_\Delta \equiv (g - 1)\, A + (g - 1)\, B \quad (\mathfrak{P}^M).$$

Wir wollen das Glied mit dem jeweils kleinsten Exponenten in $(g - 1) A$ und $(g - 1) B$ bestimmen. Zunächst ist

$$(g - 1)\, \Pi_\Omega^{mp} = \left((g\Pi_\Omega)^{(m-1)p} + \cdots + \Pi_\Omega^{(m-1)p}\right)(g - 1)\, \Pi_\Omega^p.$$

Hieraus geht hervor, daß das Glied mit dem kleinsten Exponenten in $(g - 1) A$ von $(g - 1)\, \Pi_\Omega^p$ geliefert wird. Es ist

$$(g - 1)\, \Pi_\Omega^p = \binom{p}{1} \Pi_\Omega^{p-1} \tau_g \Pi^{\varrho_g} + \cdots + \tau_g^p \Pi^{p\varrho_g}.$$

Nun liegt g in der Verzweigungsgruppe V_1 und nach dem Korollar zu Lemma 2 wird das Ideal $\mathfrak{P}_\Omega$ ein echter Teiler von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = \mathfrak{P}^{\varrho_g}$. Alle Glieder oben außer eventuell dem letzten sind also kongruent Null modulo $p\mathfrak{P}_\Omega^{p-1} \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)$, und es ist

$$(g - 1)\, A \equiv \bar{\tau}_g^p \Pi^{p\varrho_g} + \cdots \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^{p-1} \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)).$$

Die Punkte bezeichnen hier Glieder mit einem höheren Exponenten als $p\varrho_g$.

Das Glied mit dem kleinsten Exponenten in $(g - 1) B$ wird — da μ nach Voraussetzung nicht durch p teilbar ist — von $(g - 1)\, \alpha \Pi_\Omega^\mu$ geliefert, und man hat

$$(g - 1)\, \Pi_\Omega^\mu \equiv \mu \bar{\tau}_g \Pi_\Omega^{\mu-1} \Pi^{\varrho_g} + \cdots \quad (\mathfrak{P}^M)$$

und damit

$$(3) \quad (g - 1)\, \Pi_\Delta \equiv (\bar{\tau}_g^p \Pi^{p\varrho_g} + \cdots) + (\alpha\mu \bar{\tau}_g \Pi_\Omega^{\mu-1} \Pi^{\varrho_g} + \cdots) \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^{p-1} \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)).$$

Um hier α und μ zu bestimmen, wählen wir für g das Element h der Relativgruppe von Ω über Δ. Es ist $(h - 1)\, \Pi_\Delta = 0$ und weiter kann in (3) überall Π^{ϱ_h} durch Π_Ω^L ersetzt werden. Dies ergibt

$$(4) \quad (\bar{\tau}_h^p \Pi_\Omega^{pL} + \cdots) + (\alpha\mu \bar{\tau}_h \Pi_\Omega^{\mu+L-1} + \cdots) \equiv 0 \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^{L+p-1}).$$

---

[2]) Es sei daran erinnert, daß wir die Ordnung der bei $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen zugrunde legen. Die Moduln in den Kongruenzen sind also Potenzen von $\mathfrak{P}$, da hier $\mathfrak{p}$ in K/k nicht zerfällt.

Hat dann zuerst L den Maximalwert nach Lemma 4, also $\mathfrak{P}_\Omega^L = \mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Omega$, so wird

$$\Pi_\Omega^{pL} \equiv 0 \quad (p\,\mathfrak{P}_\Omega^{L+p-1}),$$

und in (4) verschwindet die ganze erste Klammer. Dann muß auch die ganze zweite Klammer modulo $p\,\mathfrak{P}_\Omega^{L+p-1}$ verschwinden. Dies ergibt

$$\Pi_\Omega^{\mu} \equiv 0 \quad (p\,\mathfrak{P}_\Omega^{p}).$$

Demnach verschwindet in (2) die zweite Klammer modulo $p\,\mathfrak{P}_\Omega^p$, und also ist

$$\Pi_\Delta \equiv (\Pi_\Omega^p + \cdots) \quad (p\mathfrak{P}_\Omega^p).$$

Aus (3) folgt

$$(g-1)\,\Pi_\Delta \equiv \bar{\tau}_g \Pi^{p\varrho_g} + \cdots \quad \left(p\,\mathfrak{P}_\Omega^{p-1}\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g,\Omega)\right),$$

wo die Punkte wieder Glieder mit einem höheren Exponenten als $p\varrho_g$ bedeuten. Die beiden letzten Kongruenzen sind aber gerade der Inhalt von Lemma 5 im Falle $\mathfrak{P}_\Omega^L = \mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Omega$.

Ist dann $\mathfrak{P}_\Omega^L$ ein echter Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Omega$, so wird $\Pi_\Omega^{pL} \not\equiv 0$ $(p\,\mathfrak{P}_\Omega^{L+p-1})$ und keine der beiden Klammern in (4) verschwindet modulo $p\,\mathfrak{P}_\Omega^{L+p-1}$. Die Glieder mit dem kleinsten Exponenten in den beiden Klammern müssen also einander aufheben, d. h. es ist

$$pL = \mu + L - 1,$$
$$\bar{\tau}_h^{p-1} + \alpha\mu \equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Setzt man den Wert von μ aus der ersten Gleichung in (3) und in die obige Kongruenz ein, so ergibt sich Lemma 5.

Als Nebenresultat ergibt sich hier ein Satz über zyklische Körper vom Grade p [2], S. 251. Der Exponent μ ist nämlich nach Voraussetzung nicht durch p teilbar. Ist also $L \equiv 1\ (p)$, so wird die obige Gleichung unmöglich, und L muß den Maximalwert haben, $\mathfrak{P}_\Omega^L = \mathfrak{l}\mathfrak{P}_\Omega$. Also erhält man:

Ist in einem relativ-zyklischen Körper vom Grade p der Verzweigungsexponent L eines Primideals $\mathfrak{P}|p$ kongruent 1 modulo p, so hat L den Maximalwert von Lemma 4, d. h. es ist $\mathfrak{P}^L = \mathfrak{l}\mathfrak{P}$.

Mit Hilfe von Lemma 5 ist es nun leicht, (1) zu beweisen. Denn ist zuerst $e_{\mathfrak{P}}(g,\Omega) < e_{\mathfrak{P}}(h,\Omega)$, also (Π^{ϱ_g}) ein echter Teiler von $\mathfrak{P}_\Omega^L$, so gibt Lemma 5

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = (\Pi_\Delta^{g} - \Pi_\Delta) = (\Pi^{p\varrho_g}) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g,\Omega)^p,$$

also $e_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = pe_{\mathfrak{P}}(g,\Omega)$. Nach Lemma 1 ist dann aber $e_{\mathfrak{P}}(gh^i,\Omega) = e_{\mathfrak{P}}(g,\Omega)$ für $i = 0, 1, \ldots, p-1$ und also

$$e_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = \sum_0^{p-1} e_{\mathfrak{P}}(gh^i,\Omega).$$

Ist zweitens $e_{\mathfrak{P}}(g,\Omega) > e_{\mathfrak{P}}(h,\Omega)$, so wird (Π_Ω^L) ein echter Teiler von (Π^{ϱ_g}), und Lemma 5 ergibt:

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = (\Pi_\Omega^{(p-1)L}\Pi^{\varrho_g}) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g,\Omega)\,\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(h,\Omega)^{p-1}$$

oder

$$e_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = e_{\mathfrak{P}}(g,\Omega) + (p-1)\,e_{\mathfrak{P}}(h,\Omega).$$

Nach Lemma 1 ist hier aber $e_{\mathfrak{P}}(gh^i,\Omega) = e_{\mathfrak{P}}(h,\Omega)$ für $i = 1, \ldots, p-1$; daher gilt:

$$e_{\mathfrak{P}}(g,\Delta) = \sum_0^{p-1} e_{\mathfrak{P}}(gh^i,\Omega).$$

Es bleibt also noch der Fall $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = e_{\mathfrak{P}}(h, \Omega) = \varrho$ zu beweisen. Hier kann man sogar $e_{\mathfrak{P}}(gh^i, \Omega) = \varrho$ für alle i voraussetzen. Denn ersetzt man in (1) das Element g durch $g' = gh^i$, so bleiben beide Seiten unverändert, und man erhält eine zur ursprünglichen äquivalente Behauptung. Ist also $e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega) \neq \varrho = e_{\mathfrak{P}}(h, \Omega)$, so kommt man auf einen schon erledigten Fall zurück. Aus Lemma 5 folgt

$$\Pi'_{\Delta} - \Pi_{\Delta} \equiv (\bar{\tau}_g^p - \bar{\tau}_h^{p-1}\bar{\tau}_g)\,\Pi^{p\varrho} + \cdots \quad (p\,\mathfrak{P}_{\Omega}^{p-1}\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)).$$

Der Koeffizient von $\Pi^{p\varrho}$ kann hier nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar sein, denn sonst käme $\bar{\tau}_g^{p-1} = \bar{\tau}_h^{p-1}$, d. h. $\bar{\tau}_g \equiv -m\bar{\tau}_h\,(\mathfrak{P})$, wo m ganzrational und nicht durch p teilbar ist. Dann ist aber

$$h^m \Pi_{\Omega} \equiv \Pi_{\Omega} + m\bar{\tau}_h \Pi^{\varrho} \quad (\mathfrak{P}^{\varrho+1})$$
$$gh^m \Pi_{\Omega} \equiv \Pi_{\Omega} + (\bar{\tau}_g + m\bar{\tau}_h)\,\Pi^{\varrho} \equiv \Pi_{\Omega} \quad (\mathfrak{P}^{\varrho+1})$$

und also $e_{\mathfrak{P}}(gh^m, \Omega) \geqq \varrho + 1 > e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)$ gegen die Voraussetzung. Also wird

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = (\Pi^{p\varrho}) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)^p$$

oder

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = p e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = \sum_0^{p-1} e_{\mathfrak{P}}(gh^i, \Omega).$$

Damit ist also Satz I bewiesen.

5. Wir wollen jetzt einige Konsequenzen aus Satz I herleiten. Der Grundkörper k sei nun wieder beliebig, d. h. also nicht notwendigerweise mit dem Verzweigungskörper oder dem Trägheitskörper identisch.

Lemma 6. *Ist $K > \Omega > \Delta > k$ und Δ Invariantenkörper zur Gruppe $H < G$, so gilt $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) > e_{\mathfrak{P}}(g', \Delta)$ für $g, g' \in G$ dann und nur dann, wenn*

$$\max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega) > \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega)$$

ist.

Denn sei zunächst $e_{\mathfrak{P}}(g', \Delta) = 0$. Dies ist nach Satz I genau dann der Fall, wenn alle $e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega) = 0$ sind. Also ist $\max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega) = 0$. Die Bedingung $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) > 0$ ist aber gleichbedeutend damit, daß wenigstens ein $e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega) > 0$ und also $\max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega) > 0$ ist, wie behauptet.

Sei dann $e_{\mathfrak{P}}(g', \Delta) > 0$ und g' in der entsprechenden Nebenklasse von G nach H so gewählt, daß $e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega) = \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega)$ ist. Dann ist $e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega) > 0$, also $g'U \cap T \neq \emptyset$, und g' kann in T gewählt werden. Lemma 1 ergibt dann

$$e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega) = \min\,(e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega),\ e_{\mathfrak{P}}(h, \Omega));$$

denn das Zeichen $>$ in Lemma 1 kommt wegen $e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega) = \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega)$ nicht in Frage. Sei auch g so gewählt, daß $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega)$ ist. Für $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega)$ wird dann

$$e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega) = \min\,(e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega),\ e_{\mathfrak{P}}(h, \Omega)) = e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega).$$

Summiert man hier über ein System von Repräsentanten der Nebenklassen von H nach U, so ergibt sich $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = e_{\mathfrak{P}}(g', \Delta)$.

Ist aber $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) > e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega)$, so ergibt sich

$$e_{\mathfrak{P}}(gh, \Omega) = \min\,(e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega),\ e_{\mathfrak{P}}(h, \Omega)) \geqq \min\,(e_{\mathfrak{P}}(g', \Omega),\ e_{\mathfrak{P}},\ (h\Omega)) = e_{\mathfrak{P}}(g'h, \Omega).$$

Summiert man hier über ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H nach U, so ergibt sich $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) > e_{\mathfrak{P}}(g', \Delta)$, was zu beweisen war.

Das Maximum von $e_{\mathfrak{P}}(gh, K)$ ist gleich Null oder gleich einem der L_i, wenn man die Trägheitsgruppe als nullte Verzweigungsgruppe zählt und für $T \neq V_1$ den Verzweigungsexponenten L_0 gleich 1 setzt. Das Lemma 6 besagt also, daß die Ungleichung

$$\text{(a)} \qquad e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) \geqq \nu > 0$$

mit einer Bedingung

$$\text{(b)} \qquad \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, K) \geqq L_i$$

für ein geeignetes i äquivalent ist. Die Bedingung (b) wird aber genau von den Elementen g der Form vh mit $v \in V_i$, $h \in H$ erfüllt. Ist insbesondere Δ/k eine normale Erweiterung, H also Normalteiler in G, so bilden diese Elemente vh gerade die kleinste H und V_i umfassende Gruppe (V_i, H). Die Verzweigungsgruppen von Δ/k sind also die voneinander verschiedenen unter den Gruppen $(V_i, H)/H$. Ist $\mathfrak{P}_\Delta$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal von Δ und E_Δ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}$ in K/Δ, so erhält man die zu diesen Gruppen gehörigen Verzweigungsexponenten $e_{\mathfrak{P}_\Delta}(g, \Delta) = \frac{1}{E_\Delta} e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ aus Satz I. Damit haben wir den Satz von Herbrand [6] bewiesen.

Ist H nicht Normalteiler von G, so bestehen die Lösungen der Ungleichung (a) aus dem Komplex $V_i H$, der im allgemeinen keine Gruppe ist. Beschränkt man sich aber auf $g \in Z$, so bestehen die Lösungen von a) aus den Elementen von $V_i \bar{H}$, wo $\bar{H} = H \cap Z$ ist. Da V_i Normalteiler in Z ist, wird $V_i \bar{H}$ eine Gruppe, und zwar gleich der von V_i und $\bar{H}$ erzeugten Gruppe $(V_i, \bar{H})$, und Lemma 6 besagt dann:

Für $g_1, g_2 \in Z$ ist $e_{\mathfrak{P}}(g_1, \Delta) > e_{\mathfrak{P}}(g_2, \Delta)$ gleichbedeutend damit, daß für ein geeignetes i die Gruppe $(V_i, H \cap Z)$ das Element g_1, aber nicht g_2 enthält.

Wenn der Körper Δ den Zerlegungskörper K_Z von $\mathfrak{P}$ in K/k umfaßt, so wird $H < Z$ und die Ungleichungen (a) definieren für $\nu = 1, 2, \ldots$ eine Reihe von Gruppen zwischen H und G. Die zu diesen Gruppen gehörigen Invariantenkörper können dann als die Verzweigungskörper von $\mathfrak{P}_\Delta$ in Δ/k betrachtet werden. Hierauf werden wir noch in 9 im Zusammenhang mit Satz III zurückkommen.

6. Man kann Satz I auch dazu benutzen, Kongruenzen für die Verzweigungsexponenten L_i von K/k herzuleiten. Sei wieder Δ der zur Untergruppe H gehörige Invariantenkörper und $g \notin H$. Erzeugt dann g einen Automorphismus von Δ, also $\Delta^g < \Delta$, so liegt das Ideal $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ schon in Δ. Denn die Zahlen $a^g - a$, wo a alle ganzen Zahlen in Δ durchläuft, erzeugen das Ideal $\mathfrak{E}(g, \Delta)$ und liegen alle in Δ. Wenn $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ aber in Δ liegt, so muß der Exponent $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ durch die Verzweigungsordnung E_Δ von $\mathfrak{P}_\Delta$ in K/Δ teilbar sein. Nach Satz I ergibt sich daraus eine Kongruenz für die L_i:

$$\sum_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, K) \equiv 0 \ (E_\Delta).$$

Ist die Gruppe G insbesondere abelsch, so gilt stets $\Delta^g < \Delta$, und die obige Kongruenz gilt für jede Untergruppe H.

Die Gruppe H kann man z. B. auf folgende Weise wählen. Die Verzweigungsordnung $E = E_k$ von $\mathfrak{p}$ in K/k ist von der Form $E = E_0 p^{r_1}$, wo p^{r_1} die Ordnung von V_1 und E_0 die (nicht durch p teilbare) Ordnung der Faktorgruppe T/V_1 ist. Da die Faktorgruppe T/V_1 zyklisch ist, gibt es also ein Element $h \in T$, $h \notin V_1$ mit der Ordnung E_0. Sei H die von h erzeugte Gruppe. Ist dann $g \in V_1$ und $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = L_i$, so werden die

$e_{\mathfrak{P}}(gh^{\nu}, K)$ gleich Eins für $\nu = 1, \ldots, E_0 - 1$. Unter der Voraussetzung, daß die Trägheitsgruppe abelsch ist, ergibt dann die obige Kongruenz, daß $L_i - 1$ durch E_0 teilbar ist [3], [4], [6].

Ist die Galoisgruppe G von K/k nicht abelsch, so wird im allgemeinen $\Delta^g \neq \Delta$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ braucht nicht in Δ zu liegen. Auch in diesem Falle ergeben sich Kongruenzen für die L_i. Sei mit $g = g_1$

$$HgH = g_1 H + g_2 H + \cdots + g_t H$$

eine Zerlegung des Komplexes HgH in linksseitige Nebenklassen nach H. Ein Element hgh^{-1}, $h \in H$, erzeugt dann auf Δ einen der Isomorphismen $\Delta \to \Delta^{g_i}$, und die g_i können auch als Repräsentanten der verschiedenen unter den von den hgh^{-1} auf Δ erzeugten Isomorphismen definiert werden. Wir setzen nun voraus, daß H in der Zerlegungsgruppe Z von K/k enthalten ist, und daß g in der Trägheitsgruppe T liegt. Dann können die g_i als Elementen von der Form hgh^{-1} auch aus T gewählt werden. Nach **3** ist dann $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g_i, \Delta) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} (\Pi_{\Delta}^{g_i} - \Pi_{\Delta})$. Wegen $h\Pi_{\Delta} = \Pi_{\Delta}$ werden die Elemente $\Pi_{\Delta}^{g_i} - \Pi_{\Delta}$, $i = 1, \ldots, t$, von h nur permutiert. Ihr Produkt liegt also in Δ, und das gleiche gilt von dem Produkt der Ideale $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g_i, \Delta)$. Also wird

$$e_{\mathfrak{P}}(g_1, \Delta) + \cdots + e_{\mathfrak{P}}(g_t, \Delta) \equiv 0 \ (E_{\Delta}).$$

Berechnet man hier die $e_{\mathfrak{P}}(g_i, \Delta)$ nach Satz I, so folgt:

Ist H eine Untergruppe der Zerlegungsgruppe von K/k und Δ der zu H gehörige Invariantenkörper, so gilt für $g \in T$, $g \notin H$

$$\sum_{u \in HgH} e_{\mathfrak{P}}(u, K) \equiv 0 \ (E_{\Delta}),$$

wo E_{Δ} die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}_{\Delta}$ in K/Δ ist.

Als Beispiel betrachten wir wieder eine zyklische Untergruppe H der Trägheitsgruppe von der Ordnung E_0. Das Element g sei aus der höchsten von $\{1\}$ verschiedenen Verzweigungsgruppe V_s gewählt. Die g_i sind dann gerade die t_s verschiedenen Konjugierten von g in der Trägheitsgruppe. Denn nach Lemma 3 kommutiert g mit allen Elementen aus V_1, und die Gruppe H bildet ein vollständiges Repräsentantensystem von T nach V_1. Insbesondere liegen die g_i wieder in V_s, und also ist $e_{\mathfrak{P}}(g_i, K) = L_s$ für $i = 1, \ldots, t_s$. Weiter ist $e_{\mathfrak{P}}(g_i h, K) = 1$ für $h \in H$, $h \neq 1$ und $E_{\Delta} = E_0$. Also folgt [1]

$$t_s(L_s - 1) \equiv 0 \ (E_0).$$

Ähnliche Kongruenzen für die übrigen L_i ergeben sich analog, wenn man statt K/k die Körper K_i/K_0 betrachtet.

7. Besonders einfach wird der Ausdruck für $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ in Satz I, wenn alle $e_{\mathfrak{P}}(gh, K)$ gleich $e_{\mathfrak{P}}(g, K)$ sind. Dies trifft dann zu, wenn alle Elemente der Nebenklasse gH in V_i, aber nicht in V_{i+1} — oder in G, aber nicht in T — liegen, Man erhält dann

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = (K : \Delta)\, e_{\mathfrak{P}}(g, K). \tag{5}$$

Diese Formel gilt insbesondere, wenn

$$e_{\mathfrak{P}}(g, K) < \min_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(h, K)$$

ist. Für $g \in Z$ folgt das aus Lemma 1. Für $g \notin Z$ ist $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = 0$, und die Ungleichung besagt, daß $H < T$ ist. Dann wird $gH \cap T = \emptyset$ und also $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = 0$.

Weiter gilt (5) auch für beliebiges $g \notin H$, falls

$$V_{i+1} < H < V_i$$

ist, d. h. wenn Δ zwischen zwei Verzweigungskörpern K_i und K_{i+1} liegt, denn dann gilt offenbar $e_{\mathfrak{P}}(gh, K) = e_{\mathfrak{P}}(g, K)$. Ist dann $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K) = \mathfrak{P}^{L_m}$, $m \leqq i$, so folgt

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{P}^{(K:\Delta) L_m} = \mathfrak{P}_{\Delta}^{L_m}. \tag{5'}$$

Ist insbesondere Δ/k außerdem noch relativ-galoissch, so erhält man aus (5') sofort die Verzweigungsgruppen und -exponenten von Δ/k: Die Verzweigungsgruppen von Δ/k sind genau die Gruppen V_m/H für $m \leqq i$, und der zugehörige Verzweigungsexponent ist L_m (für $H = V_i$ muß $m < i$ sein) [3], [6].

Auch die bekannte Dedekind-Henselsche Ungleichung für die Verzweigungsexponenten L_i des Körpers K/k folgt leicht aus (5) mit Hilfe von Lemma 4. Sei dazu H ein Normalteiler vom Index p in der Verzweigungsgruppe V_i, welcher V_{i+1} umfaßt. Der zu dieser Gruppe H gehörige Invariantenkörper Δ liegt zwischen K_i und K_{i+1}. Ist dann g ein nicht in H gelegenes Element von V_i und p^{r_i} die Ordnung von V_i, so folgt

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{P}^{p^{r_i-1} L_i}.$$

Nach Lemma 4 ist aber $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ Teiler von $\mathfrak{l}\mathfrak{P}_{\Delta} = \mathfrak{l}\mathfrak{P}^{p^{r_i-1}}$. Also wird $\mathfrak{P}^{p^{r_i-1}(L_i-1)}$ Teiler von $\mathfrak{l}$. Ist t die absolute Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}$, so wird $\mathfrak{l} = \mathfrak{P}^{\frac{t}{p-1}}$, und man erhält die gesuchte Ungleichung

$$p^{r_i-1}(L_i - 1) \leqq \frac{t}{p-1}.$$

Wir betrachten jetzt einen anderen Fall, in dem der Ausdruck für $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ in Satz I besonders einfach wird. In einer Nebenklasse von G nach H wählen wir als Repräsentanten ein Element g mit maximalem Verzweigungsexponenten in K:

$$e_{\mathfrak{P}}(g, K) = \max_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, K).$$

Nach Lemma 1 wird dann

$$e_{\mathfrak{P}}(gh, K) \geqq \min\left(e_{\mathfrak{P}}(g, K),\ e_{\mathfrak{P}}(h, K)\right),$$

wo das Zeichen $>$ nur gelten kann, wenn $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = e_{\mathfrak{P}}(h, K)$ ist. Dann wäre aber $e_{\mathfrak{P}}(gh, K) > e_{\mathfrak{P}}(g, K)$ gegen die Voraussetzung über g, so daß immer das Gleichheitszeichen gilt. Ist dann

$$e_{\mathfrak{P}}(g, K) \geqq \max_{\substack{h \in H \\ h \neq 1}} e_{\mathfrak{P}}(h, K),$$

so folgt für $h \neq 1$

$$e_{\mathfrak{P}}(gh, K) = e_{\mathfrak{P}}(h, K),$$

und Satz I ergibt

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = e_{\mathfrak{P}}(g, K) + \sum_{\substack{h \in H \\ h \neq 1}} e_{\mathfrak{P}}(h, K).$$

Die Summe ist aber gleich dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ in der Relativdifferente $\mathfrak{d}_{K/\Delta}$ von K über Δ. Ist also $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/\Delta}$ der Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu dieser Differente, so wird

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K)\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/\Delta}. \tag{6}$$

Insbesondere gilt (6) für alle $g \in V_1$, wenn das Ideal $\mathfrak{P}$ in K/Δ nicht höher verzweigt ist. Denn dann wird $H \cap V_1 = \{1\}$ und also $\max\limits_{\substack{h \in H \\ h \neq 1}} e_{\mathfrak{P}}(h, K) \leqq 1$, während $e_{\mathfrak{P}}(g, K) \geqq 2$ ist.

Weiter wird dann $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/\Delta} = \mathfrak{P}^{E_\Delta - 1}$. Ist Δ/k außerdem noch relativ-galoissch, so sind die Verzweigungsgruppen von Δ/k nach 5 genau die Gruppen $(V_i, H)/H \cong V_i/V_i \cap H \cong V_i$ und können mit den V_i identifiziert werden. Sind $L_{i,K}$ und $L_{i,\Delta}$ die zu V_i gehörigen Verzweigungsexponenten in K/k resp. Δ/k, so gibt (6)

$$\mathfrak{P}^{L_{i,\Delta} E_\Delta} = \mathfrak{P}^{L_{i,K}} \mathfrak{P}^{E_\Delta - 1},$$

und also

$$E_\Delta L_{i,\Delta} = L_{i,K} + E_\Delta - 1 \qquad \text{für } i \geqq 1. \tag{7}$$

Für $i_1, i_2 \geqq 1$ folgt hieraus

$$E_\Delta (L_{i_1,\Delta} - L_{i_2,\Delta}) = L_{i_1,K} - L_{i_2,K}. \tag{7'}$$

Diese beiden Formeln werden wir später noch brauchen.

Wir zeigen jetzt, daß für einen beliebigen Zwischenkörper Δ/k die Bestimmung von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ immer auf die Spezialfälle (5) und (6) zurückgeführt werden kann.

Satz II. *Sei Δ/k der zur Untergruppe $H < G$ gehörige Invariantenkörper und sei g in einer linksseitigen Nebenklasse von G nach H so gewählt, daß $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = \max\limits_{h \in H} e_{\mathfrak{P}}(gh, K)$ gilt. Ist dann U die Untergruppe der Elemente von H mit $e_{\mathfrak{P}}(u, K) > e_{\mathfrak{P}}(g, K)$ und Ω der zu U gehörige Invariantenkörper, so wird*

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K)^{(K:\Omega)} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Omega/\Delta}.$$

Ist zunächst $g \notin Z$, so wird $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = (1)$, und Ω wird der Trägheitskörper von K/Δ, d. h. $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Omega/\Delta} = (1)$. Satz II gilt also trivialerweise.

Sei dann $g \in Z$. Wegen $e_{\mathfrak{P}}(g, K) < \min\limits_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(u, K)$ ergibt (5)

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K)^{(K:\Omega)},$$

und es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Omega/\Delta}$ ist. Sei $h_1 = 1, h_2, \ldots$ ein System von Repräsentanten der linksseitigen Nebenklassen von H nach U. Dann wird für $i > 1$ nach der Definition von U

$$e_{\mathfrak{P}}(h_i, K) \leqq e_{\mathfrak{P}}(g, K).$$

Da $e_{\mathfrak{P}}(h_i, K) = \max\limits_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(h_i u, K)$ und $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = \max\limits_{u \in U} e_{\mathfrak{P}}(gu, K)$ ist, folgt aus Lemma 6

$$e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega) \leqq e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega).$$

Aus Lemma 1 folgt dann

$$e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega) \geqq \min\left(e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega),\ e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega)\right) = e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega).$$

Hier kann das Zeichen $>$ aber nie gelten. Denn es käme nur für $e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) = e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega)$ in Frage, und dann wäre $e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega) > e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega)$. Nach Lemma 6 gäbe es dann ein $u \in U$ mit $e_{\mathfrak{P}}(gh_i u, K) > e_{\mathfrak{P}}(g, K)$, gegen die Voraussetzung über g. Also gilt immer das Gleichheitszeichen und für $i > 1$ ist

$$e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega) = e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega).$$

Dann ergibt Satz I':

$$e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) + \sum_{i>1} e_{\mathfrak{P}}(gh_i, \Omega)$$
$$= e_{\mathfrak{P}}(g, \Omega) + \sum_{i>1} e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega).$$

Die letzte Summe ist aber gleich dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{d}_{\Omega/\Delta}$. Dies kann man mittels der in 1 erwähnten Formel für die Differente eines relativ-galoisschen Körpers sehen. Denn es ist

$$\sum_{i>1} e_{\mathfrak{P}}(h_i, \Omega) = \sum_{\substack{h \in H \\ h \neq 1}} e_{\mathfrak{P}}(h, K) - \sum_{\substack{u \in U \\ u \neq 1}} e_{\mathfrak{P}}(u, K).$$

Die erste Summe rechts ist gleich dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{d}_{K/\Delta}$ und die zweite gleich demjenigen in $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$, und weiter ist $\mathfrak{d}_{\Omega/\Delta} = \frac{\mathfrak{d}_{K/\Delta}}{\mathfrak{d}_{K/\Omega}}$. Damit ist Satz II bewiesen.

8. Wir kommen jetzt zu dem Kriterium dafür, daß ein Zwischenkörper Δ/k von K/k schon im i-ten Verzweigungskörper K_i/k enthalten ist. Den Trägheitskörper zählen wir hier als nullten Verzweigungskörper K_0 und die Trägheitsgruppe als nullte Verzweigungsgruppe V_0. Ist $K_0 \neq K_1$, d. h. $V_0 \neq V_1$, so wird $L_0 = 1$.

Der Zwischenkörper Δ/k sei wieder Invariantenkörper zur Untergruppe H von G. Dann bezeichnen wir mit $e_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ den größten der Verzweigungsexponenten $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$ für $g \in G$, $g \notin H$, und setzen $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)}$. Für den Grundkörper k sei $e_{\mathfrak{P}}(k/k) = 0$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(k/k) = (1)$. Wir definieren dann das Ideal $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$, die $\mathfrak{P}$-Höhe von Δ/k, durch

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Delta/k}.$$

Diese $\mathfrak{P}$-Höhe ist ein Ideal in K/k und liegt im allgemeinen nicht in Δ/k. Weiter ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ ein Maß für die Höhe der Verzweigung des Ideals $\mathfrak{P}_\Delta$ über dem Grundkörper k. Dies geht hervor aus

Satz III. *Sei K/k ein relativ-galoisscher Körper, $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K/k und K_i/k, $i = 0, 1, \ldots, s+1$, die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Reihe der Verzweigungskörper in K/k. Dann gilt:*

a) *Ein Zwischenkörper Δ/k in K/k ist dann und nur dann im Verzweigungskörper K_i/k enthalten, wenn seine $\mathfrak{P}$-Höhe Teiler der $\mathfrak{P}$-Höhe von K_i/k ist.*

b) *Die $\mathfrak{P}$-Höhe des Zwischenkörpers Δ/k ist gleich der $\mathfrak{P}$-Höhe des kleinsten Verzweigungskörpers K_i/k, welcher Δ/k umfaßt.*

Wir beweisen zuerst b). Ist dann Δ schon in K_0 enthalten, so ist $\mathfrak{P}_\Delta$ unverzweigt über k und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Delta/k} = (1)$. Hieraus folgt $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_0/k) = (1)$.

Sei also $K_i \neq K_0$ [a]) und Δ in K_i, aber nicht in K_{i-1} enthalten. Dies bedeutet, daß V_i, aber nicht V_{i-1} in der zu Δ gehörenden Gruppe H enthalten ist. Sei v ein Element aus V_{i-1}, welches nicht in H liegt. Nach Lemma 6 ist $e_{\mathfrak{P}}(v, \Delta) = e_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$. Wir berechnen $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(v, \Delta) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ mittels Satz II. Die Gruppe U wird hier gleich V_i und der Körper Ω gleich K_i. Da auch $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(v, K_i) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ ist, so gilt nach Satz II

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_i/\Delta}$$

und also

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_i/\Delta} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, \Delta/k} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k),$$

womit b) bewiesen ist.

Zum Beweis von a) zeigen wir, daß die $\mathfrak{P}$-Höhe von K_i/k ein echter Teiler der $\mathfrak{P}$-Höhe von K_{i+1}/k ist, falls $K_{i+1} \neq K_i$ ist.

[a]) d. h. $i \geqq 1$ oder $i \geqq 2$ je nachdem, ob $K_0 \neq K_1$ ist oder nicht.

Die $\mathfrak{P}$-Höhe von K_0/k ist gleich (1). Ist $K_i \neq K_0$, so ist $\mathfrak{P}_{K_i}$ verzweigt über k und also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ sicher durch $\mathfrak{P}$ teilbar, und es enthält $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_0/k)$ als echten Teiler.

Sei also $K_i \neq K_0$ und weiter $v \in V_{i-1}$, $v \notin V_i$. Dann wird nach (5')

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(K_i/k) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(v, K_i) = \mathfrak{P}_{K_i}^{L_i - 1}$$

und also

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k) = \mathfrak{P}_{K_i}^{L_i - 1} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_i/k}. \tag{8}$$

Weiter wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_{i+1}/k) = \mathfrak{P}_{K_{i+1}}^{L_i} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_{i+1}/K_i} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_i/k}$. Alle Automorphismen von K_{i+1}/K_i, abgesehen von dem identischen, haben den gleichen Verzweigungsexponenten in bezug auf K_{i+1}, und daher wird $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_{i+1}/K_i} = \mathfrak{P}_{K_{i+1}}^{L_i((K_{i+1}:K_i)-1)}$. Da $\mathfrak{P}_{K_i} = \mathfrak{P}_{K_{i+1}}^{(K_{i+1}:K_i)}$ ist, erhält man

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_{i+1}/k) = \mathfrak{P}_{K_i}^{L_i} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K_i/k}. \tag{8'}$$

Wegen $L_i > L_{i-1}$ wird also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_{i+1}/k)$, wie behauptet. Hieraus folgt unmittelbar a). Denn nach b) wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_m/k)$, wo K_m der kleinste Verzweigungskörper ist, welcher Δ/k umfaßt. Ist dann $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$, so ist $m \leqq i$ und also $\Delta < K_m < K_i$. Ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ nicht Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$, so wird $m > i$, und Δ ist nicht in K_i enthalten. Damit ist also Satz III bewiesen.

Sind Δ/k und Ω/k zwei Zwischenkörper in K/k, so sagen wir, Δ/k habe eine größere $\mathfrak{P}$-Höhe als Ω/k, wenn $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ eine höhere Potenz von $\mathfrak{P}$ ist als $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k)$. Sind beide Körper Δ und Ω schon in K_i enthalten, so gilt das gleiche von ihrem Kompositum (Δ, Ω) und aus Satz III folgt das

Korollar. *Die $\mathfrak{P}$-Höhe eines Kompositums zweier Unterkörper Δ/k und Ω/k von K/k ist gleich dem Maximum der $\mathfrak{P}$-Höhen von Δ/k und Ω/k.*

Dies kann als Verallgemeinerung der Tatsachen angesehen werden, daß das Kompositum zweier Unterkörper, in denen das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal unverzweigt resp. nicht höher verzweigt ist, wieder die gleiche Eigenschaft besitzt.

Aus Satz III folgt unmittelbar eine direkte Charakterisierung der Verzweigungskörper. Zu einem Ideal $\mathfrak{P}^m$ mit $m \geqq 0$ bilden wir das Kompositum $K_{\mathfrak{P}^m}$ aller Zwischenkörper von K/k, deren $\mathfrak{P}$-Höhe Teiler von $\mathfrak{P}^m$ ist. $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_{\mathfrak{P}^m}/k)$ ist wieder Teiler von $\mathfrak{P}^m$ und $K_{\mathfrak{P}^m}$ ist also der maximale Unterkörper von K/k, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe Teiler von $\mathfrak{P}^m$ ist. Nach Satz III wird $K_{\mathfrak{P}^m}$ gleich dem größten Verzweigungskörper K_i, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe Teiler von $\mathfrak{P}^m$ ist. Wenn man m variiert, erhält man so alle Verzweigungskörper.

Die $\mathfrak{P}$-Höhe des Trägheitskörpers K_0/k ist gleich dem Einsideal. Der Trägheitskörper ist also der größte Unterkörper von K/k mit der $\mathfrak{P}$-Höhe (1), und er enthält genau die Unterkörper von K/k, deren $\mathfrak{P}$-Höhe gleich (1) ist.

Wenn der erste Verzweigungskörper K_1 von K_0 verschieden ist, so ergibt sich aus (8'), daß $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_1/k) = \mathfrak{P}^E \mathfrak{T} \mathfrak{p}$ ist. Der erste Verzweigungskörper K_1 ist also charakterisiert als der größte Zwischenkörper von K/k, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe Teiler von $\mathfrak{p}$ (d. h. von $\mathfrak{P}^E$) ist, und er enthält genau die Zwischenkörper von K/k mit dieser Eigenschaft. Es ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_1/k) = \mathfrak{P}^E$ oder $= (1)$, je nachdem, ob K_1 von K_0 verschieden ist oder nicht.

Die $\mathfrak{P}$-Höhe eines höheren Verzweigungskörpers K_i, $i > 1$, ist größer als $\mathfrak{P}^E$. Jeder höhere Verzweigungskörper K_i ist also charakterisiert als der größte Unterkörper von K/k, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe gleich $\mathfrak{P}^{\mu_i}$ ist, wo $\mu_{i+1} > \mu_i > E$ ist, und K_i enthält genau diejenigen Zwischenkörper von K/k, deren $\mathfrak{P}$-Höhen Teiler von $\mathfrak{P}^{\mu_i}$ sind.

Ist Δ/k ein beliebiger Zwischenkörper von K/k, so bezeichnen wir mit $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ den Wertevorrat der $\mathfrak{P}$-Höhen aller Körper Ω/k, die in Δ/k enthalten sind. Der Wertevorrat $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ besteht dann genau aus den $\mathfrak{P}$-Höhen der Verzweigungskörper, d. h. aus dem Einsideal, eventuell dem Ideal $\mathfrak{P}^E$ und den s Idealen $\mathfrak{P}^{\mu_i}$ mit $E < \mu_2 < \cdots < \mu_{s+1}$, wo s gleich der Anzahl der höheren Verzweigungskörper ist. Es sei noch bemerkt, daß wenn $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ und die Relativgrade $(K : K_i)$ bekannt sind, die Verzweigungsexponenten L_i leicht berechnet werden können. Denn durch Division der Formeln (8) und (8′) erhält man sofort die Differenzen $L_i - L_{i-1}$. Ist $K_1 \neq K_0$, so ist $L_0 = 1$ bekannt. Ist $K_1 = K_0$, so ergibt (8′) für $i = 1$

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_2/k) = \mathfrak{P}_{K_1}^{L_1} = \mathfrak{P}^{L_1(K:K_1)},$$

woraus man L_1 erhält.

9. Die Definition, die wir für die $\mathfrak{P}$-Höhe eines Relativkörpers Δ/k gegeben haben, nahm Bezug auf einen relativ-galoisschen Körper K/k, in den Δ/k eingebettet ist. Wir wollen nun eine globale Höhe $\mathfrak{H}(\Delta/k)$ definieren, welche durch Δ/k selbst bestimmt ist.

Dazu betrachten wir in Δ die Ordnung $\mathfrak{o}_\Delta$ der ganzen Zahlen (und nicht wie bisher die Ordnung der bei $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen). Jeder Isomorphismus $\Delta \to \Delta^g$ von Δ über k definiert ein Ideal $\mathfrak{E}(g, \Delta)$, welches von allen $a^g - a$ mit $a \in \mathfrak{o}_\Delta$ erzeugt wird. Ist $\mathfrak{E}(\Delta/k)$ das kleinste gemeinsame Multiplum der Ideale $\mathfrak{E}(g, \Delta)$, welche von (0) verschieden sind, so setzen wir

$$\mathfrak{H}(\Delta/k) = \mathfrak{E}(\Delta/k)\, \mathfrak{d}_{\Delta/k}.$$

Dieses Ideal $\mathfrak{H}(\Delta/k)$ ist durch Δ/k allein bestimmt. Im allgemeinen liegt es nicht in Δ, aber sicher in jedem relativ-galoisschen Körper, der Δ umfaßt. Ist K/k ein solcher relativ-galoisscher Körper und $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K/k, so wird der Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{E}(\Delta/k)$ offenbar gleich dem früher definierten $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$. Dann wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ gleich dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{H}(\Delta/k)$ und also

$$\mathfrak{H}(\Delta/k) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k).$$

Hier geben nur die verzweigten Primideale einen von dem Einsideal verschiedenen Beitrag zu $\mathfrak{H}(\Delta/k)$, und das Produkt besteht nur aus endlich vielen Gliedern.

Den Wertevorrat $[\Delta/k]$ definieren wir als die Menge aller Höhen $\mathfrak{H}(\Omega/k)$, wo Ω/k alle Zwischenkörper von Δ/k durchläuft. Für die Höhe des Kompositums $(\Sigma, \Omega)/k$ zweier Relativkörper Σ/k und Ω/k ergibt das Korollar zu Satz III unmittelbar, daß $\mathfrak{H}((\Sigma, \Omega)/k)$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Multiplum von $\mathfrak{H}(\Sigma/k)$ und $\mathfrak{H}(\Omega/k)$ ist. Der Wertevorrat $[\Delta/k]$ enthält also mit zwei Idealen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ auch ihr kleinstes gemeinsames Multiplum. Weiter definiert jedes Ideal $\mathfrak{A}$ einen Zwischenkörper $\Delta_{\mathfrak{A}}/k$ von Δ/k, nämlich den größten Zwischenkörper von Δ/k, dessen Höhe Teiler von $\mathfrak{A}$ ist, und $\Delta_{\mathfrak{A}}/k$ enthält genau die Zwischenkörper von Δ/k, deren Höhe Teiler von $\mathfrak{A}$ ist. Jeder Körper $\Delta_{\mathfrak{A}}$ ist offenbar gleich einem Körper $\Delta_{\mathfrak{H}}$, wo $\mathfrak{H} \in [\Delta/k]$ ist.

Für einen relativ-galoisschen Körper K/k umfaßt die Menge der Körper $K_{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{H} \in [K/k]$ die Verzweigungskörper sämtlicher Primideale von K/k. Denn ist K_i/k Verzweigungskörper des Primideals $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k) = \mathfrak{P}^{\mu_i}$, so sei $\mathfrak{H}_i$ das kleinste gemeinsame Multiplum aller Ideale in $[K/k]$, die höchstens durch $\mathfrak{P}^{\mu_i}$ teilbar sind. Dann ist $\mathfrak{H}_i \in [K/k]$ und $K_i = K_{\mathfrak{H}_i}$. Die Körper $K_{\mathfrak{H}}$ können also als eine Verallgemeinerung der Verzweigungskörper betrachtet werden, worauf wir aber hier nicht näher eingehen werden.

Mit Hilfe der $\mathfrak{P}$-Höhen kann man auch für ein Primideal $\mathfrak{P}_\Delta$ einer nicht-normalen Erweiterung Δ/k ein System von Verzweigungskörpern definieren. Sei dazu $\mathfrak{P}_r$ ein Prim-

teiler von $\mathfrak{P}_\Delta$ in der relativ-galoisschen Erweiterung $K/k > \Delta/k$. Die Verzweigungskörper von $\mathfrak{P}_\nu$ in Δ/k definieren wir dann als die maximalen Unterkörper in Δ/k mit gegebener $\mathfrak{P}_\nu$-Höhe, d. h. zu jedem Ideal $\mathfrak{P}_\nu^\mu \in [\Delta/k]_{\mathfrak{P}_\nu}$ gehört ein Verzweigungskörper $\Delta_i^{(\nu)}$, welcher das Kompositum aller Zwischenkörper in Δ/k ist, deren $\mathfrak{P}_\nu$-Höhe Teiler von $\mathfrak{P}_\nu^\mu$ ist. Die Reihe der $\Delta_i^{(\nu)}$, $i = 0, 1, \ldots$, erhält man offenbar als die verschiedenen unter den Durchschnitten $\Delta \cap K_m^{(\nu)}$, wo $K_m^{(\nu)}$ die Verzweigungskörper von $\mathfrak{P}_\nu$ in K/k durchläuft.

Zu jedem Primteiler $\mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{P}_\Delta$ erhält man eine Reihe von Verzweigungskörpern $\Delta_i^{(\nu)}$. Unter diesen gebe es r voneinander verschiedene Reihen, und wir nehmen an, daß diese zu den Primidealen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ gehören. Das System der Verzweigungskörper $\Delta_i^{(\nu)}$ für $\nu = 1, \ldots, r$ ist dann durch Δ/k und $\mathfrak{P}_\Delta$ vollständig bestimmt und unabhängig von dem Einbettungskörper K. Denn sei K'/k eine relativ-galoissche Erweiterung, welche K/k umfaßt und $\mathfrak{P}'$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}_\Delta$ in K'. Ist dann $\mathfrak{P}'$ Teiler von $\mathfrak{P}_\nu$, so wird die Reihe der zu $\mathfrak{P}'$ gehörigen Verzweigungskörper in Δ/k gleich der Reihe $\Delta_i^{(\nu)}$. Denn für einen Zwischenkörper Ω/k in Δ/k wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}'}(\Omega/k) \underset{\mathfrak{P}'}{\sim} \mathfrak{H}(\Omega/k)$ und $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}_\nu}(\Omega/k) \underset{\mathfrak{P}_\nu}{\sim} \mathfrak{H}(\Omega/k)$ und also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}'}(\Omega/k) \underset{\mathfrak{P}'}{\sim} \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}_\nu}(\Omega/k)$. Die Maximalkörper gegebener $\mathfrak{P}'$-Höhe in Δ/k sind also auch Maximalkörper gegebener $\mathfrak{P}_\nu$-Höhe und umgekehrt. Bettet man also Δ/k in $K' > K$ ein, so erhält man das gleiche System von Verzweigungskörpern $\Delta_i^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{P}_\Delta$ wie in K. Sei dann $\overline{K}/k$ die kleinste relativ-galoissche Erweiterung, welche Δ/k umfaßt. Jeder Einbettungskörper umfaßt $\overline{K}$ und ergibt also das gleiche System von Verzweigungskörpern zu $\mathfrak{P}_\Delta$ wie $\overline{K}/k$. Dieses System ist also von dem Einbettungskörper unabhängig.

Das System der zu $\mathfrak{P}_\Delta$ in Δ/k gehörigen Verzweigungskörper wird nur aus einer einzigen Reihe Δ_i bestehen, wenn das Ideal $\mathfrak{P}_\Delta$ in K/Δ nicht zerfällt, d. h. wenn Δ den Zerlegungskörper K_Z des Primideals $\mathfrak{P}$ in K umfaßt. Die Verzweigungskörper Δ_i haben dann ähnliche Eigenschaften wie im Hilbertschen Fall.

Läßt sich der Relativkörper Δ/k so in eine relativ-galoissche Erweiterung K/k einbetten, daß er den Zerlegungskörper K_Z des Primideals $\mathfrak{P}$ von K umfaßt, so gilt:

a) *Jeder Verzweigungskörper Δ_i von $\mathfrak{P}_\Delta$ ist Invariantenkörper zu einer Untergruppe der Galoisgruppe G von K/k, welche in G durch eine Ungleichung der Form $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) \geqq \nu_i$ definiert ist.*

b) *Das Ideal $\mathfrak{P}_{\Delta_0}$ ist unverzweigt über k und $\mathfrak{P}_{\Delta_i}$ ist rein verzweigt über Δ_{i-1} für $i \geqq 1$.*

c) *Der Relativgrad $(\Delta_1 : \Delta_0)$ ist relativ prim zu p und $(\Delta_{i+1} : \Delta_i)$ ist eine Potenz von p für $i \geqq 1$.*

Denn der Verzweigungskörper Δ_i ist der Durchschnitt von Δ mit einem gewissen Verzweigungskörper K_m von $\mathfrak{P}$. Gehört Δ in K zur Gruppe H, so gehört Δ_i zur Gruppe (H, V_m). Da H in der Zerlegungsgruppe Z enthalten ist, wird (H, V_m) gleich dem Komplex $V_m H$ und ist nach 5 durch eine Ungleichung der Form $e_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) \geqq \nu_i$ in G definiert. Der erste Teil von b) folgt unmittelbar aus $\Delta_0 < K_0$. Der zweite Teil ergibt sich daraus, daß das Primideal $\mathfrak{P}$ über allen Δ_i den gleichen Relativgrad hat. Denn die Gruppen $V_i H$ der Relativkörper K/Δ_i erzeugen für $i = 0, 1, \ldots$ alle genau die gleichen Automorphismen im Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ der ganzen Zahlen von K modulo $\mathfrak{P}$. Das Primideal $\mathfrak{P}_{\Delta_i}$ hat also den Relativgrad 1 über Δ_{i-1} und ist also rein verzweigt in Δ_i/Δ_{i-1}. Zum Beweis von c) zeigen wir, daß der Index $(V_i H : V_{i+1} H)$ Teiler von $(V_i : V_{i+1})$ ist. Sind $v, v' \in V_i$, so wird dann und nur dann $vH = v'H$, wenn $v^{-1}v' \in V_i \cap H$ ist. Also wird

$$(V_i H : H) = (V_i : H \cap V_i)$$

und

$$(V_iH : V_{i+1}H) = \frac{(V_i : H \cap V_i)}{(V_{i+1} : H \cap V_{i+1})} = \frac{(V_i : V_{i+1})}{(H \cap V_i : H \cap V_{i+1})}.$$

Hieraus folgt c), da $(V_0 : V_1)$ relativ prim zu p und $(V_i : V_{i+1})$ für $i > 0$ eine Potenz von p ist.

10. Mit Hilfe der $\mathfrak{P}$-Höhen kann man Eigenschaften der Verzweigungskörper eines Kompositums zweier Körper herleiten. Seien Δ/k und Ω/k zwei normale Erweiterungen von k und $K = (\Delta, \Omega)$ ihr Kompositum, d. h. der kleinste Körper, der sowohl Δ als auch Ω enthält. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K und $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideale in Δ und Ω. Weiter sei $K_0, K_1, \ldots, K_{s+1} = K$ die Reihe der Verzweigungskörper zu $\mathfrak{P}$ in K/k sowie $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{s_1+1} = \Delta$ und $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{s_2+1} = \Omega$ die entsprechenden Reihen der Primideale $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in Δ/k resp. Ω/k.

Wir setzen die Verzweigungsgruppen und -exponenten von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in Δ/k resp. Ω/k als bekannt voraus. Die Wertevorrate $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}_1}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}_2}$ sind dann auch bekannt. Es soll untersucht werden, was sich dann über die Verzweigungsgruppen und -exponenten von $\mathfrak{P}$ in K/k sagen läßt.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir zunächst den Wertevorrat $[K/k]_{\mathfrak{P}}$. Ist Σ ein Körper zwischen k und Δ, so wird die $\mathfrak{P}$-Höhe von Σ/k gleich dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}_1}(\Sigma/k) = \mathfrak{P}_1^{\mu}$. Sind E, E_1 und E_2 die Verzweigungsordnungen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ über k, so wird $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Sigma/k) = \mathfrak{P}^{\frac{E}{E_1}\mu}$, und dieses Ideal gehört zu $[K/k]_{\mathfrak{P}}$. Ist analog $\mathfrak{P}_2^{\nu} \in [\Omega/k]_{\mathfrak{P}_2}$, so wird $\mathfrak{P}^{\frac{E}{E_2}\nu} \in [\Omega/k]_{\mathfrak{P}} < [K/k]_{\mathfrak{P}}$. Durch Vergleich der Zahlen $\frac{\mu}{E_1}$ und $\frac{\nu}{E_2}$ kann man also feststellen, ob $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ gemeinsame Ideale enthalten, und man kann die Gesamtheit der Ideale aus $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}_1}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}_2}$ nach der Größe ihres $\mathfrak{P}$-Beitrages ordnen. Die Kenntnis der Verzweigungsordnung E im Kompositum ist dazu nicht erforderlich. Die Anzahl der voneinander verschiedenen $\mathfrak{P}$-Beiträge, die man auf diese Weise erhält, ergibt auf jeden Fall eine untere Grenze für die Anzahl der Verzweigungskörper im Kompositum K. Wie wir sehen werden, kann $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ jedoch Ideale enthalten, die weder in $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ noch in $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ vorkommen. Wir beweisen jetzt

Satz IV. *Sei K/k das Kompositum der relativ-galoisschen Erweiterungen Δ/k und Ω/k. Enthalten dann die Wertevorrate $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ außer dem Einsideal kein gemeinsames Ideal, so wird*

$$E = E_1E_2, \qquad s = s_1 + s_2,$$

und $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ besteht genau aus den Idealen von $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$. Weiter erhält man jeden Verzweigungskörper K_i, $i \geqq 0$, von $\mathfrak{P}$ in K/k als Kompositum

$$K_i = (\Delta_m, \Omega_n),$$

wo entweder Δ_m der größte Verzweigungskörper in Δ/k ist, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe höchstens gleich der von Ω_n/k ist, oder umgekehrt Ω_n der größte Verzweigungskörper in Ω/k ist, dessen $\mathfrak{P}$-Höhe höchstens gleich der von Δ_m/k ist.

Wir beweisen zuerst die Behauptung über die Bildung der Verzweigungskörper K_i. Enthalten $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ nur das Einsideal, so sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ unverzweigt über k. Das Ideal $\mathfrak{P}$ ist dann auch unverzweigt über k und der Satz ist trivial. Enthält dann wenigstens einer der beiden Wertevorräte ein vom Einsideal verschiedenes Ideal, so wird nach Voraussetzung $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) \neq \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k)$. Ist z. B. $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k)$ Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$, so wird

$\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ nach dem Korollar zu Satz III. Der Körper K_s ist der größte von K verschiedene Verzweigungskörper in K/k und enthält also genau die Unterkörper von K/k, deren $\mathfrak{P}$-Höhe echter Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ ist. K_s enthält also das Kompositum von Δ_{s_1} und Ω. Wäre K_s größer als dieses Kompositum, so müßte er einen von Δ_{s_1} verschiedenen Körper zwischen Δ_{s_1} und Δ enthalten. Dies ist aber unmöglich, denn die $\mathfrak{P}$-Höhe eines solchen Körpers ist gleich $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k)$. Also ist $K_s = (\Delta_{s_1}, \Omega)$.

Ist dann $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta_{s_1}/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k) = (1)$, so ist K_s schon der Trägheitskörper von K/k und die Behauptung über die Bildung der Verzweigungskörper ist richtig. Enthält $[\Delta_{s_1}/k]_{\mathfrak{P}}$ oder $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ ein vom Einsideal verschiedenes Ideal, so sieht man ähnlich wie oben, daß K_{s-1} entweder gleich (Δ_{s_1-1}, Ω) oder gleich $(\Delta_{s_1}, \Omega_{s_2})$ ist, je nachdem, ob $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k)$ Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta_{s_1}/k)$ ist oder nicht. Im letzteren Fall z. B. ist nach Satz III klar, daß

$$(\Delta_{s_1}, \Omega_{s_2}) < K_{s-1} < (\Delta_{s_1}, \Omega) = K_s$$

ist. Wäre $K_{s-1} \neq (\Delta_{s_1}, \Omega_{s_2})$, so müßte K_{s-1} einen Körper $\Omega' \neq \Omega_{s_2}$ zwischen Ω_{s_2} und Ω enthalten. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega'/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_s/k)$ ist. Also gilt $K_{s-1} = (\Delta_{s_1}, \Omega_{s_2})$. Indem man so fortfährt, ergibt sich, daß alle Verzweigungskörper K_i von der angegebenen Form $K_i = (\Delta_m, \Omega_n)$ sind.

Die $\mathfrak{P}$-Höhe von K_i ist gleich einer der $\mathfrak{P}$-Höhen $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta_m/k)$ oder $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega_n/k)$. Also besteht $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ genau aus den Idealen von $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ und es ist $s = s_1 + s_2$.

Ist Σ der größte gemeinsame Teilkörper von Δ und Ω, so ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Sigma/k)$ ein gemeinsamer Wert von $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ und also gleich dem Einsideal. Σ liegt daher schon in $K_0 = (\Delta_0, \Omega_0)$ und ist der größte gemeinsame Körper von Δ_0 und Ω_0. Die Galoisgruppe von K/Σ wird das direkte Produkt der Gruppen von Δ/Σ und Ω/Σ. Dies ergibt

$$(K : K_0) = (\Delta : \Delta_0)\ (\Omega : \Omega_0),$$

d. h.

$$E = E_1 E_2.$$

Damit ist Satz IV vollständig bewiesen.

Auch die Verzweigungsgruppen und -exponenten von $\mathfrak{P}$ in K/k lassen sich unter den Voraussetzungen von Satz IV leicht bestimmen. Die Galoisgruppe von K/k wird eine Untergruppe des direkten Produktes $H \times U$ der Galoisgruppen H und U von Δ/k und Ω/k. Sind Δ'/k und Ω'/k Zwischenkörper in Δ/k resp. Ω/k, welche zu den Gruppen $H' < H$ resp. $U' < U$ gehören, so ist die zu dem Kompositum (Δ', Ω') in K/k gehörige Gruppe eine Untergruppe des direkten Produktes $H' \times U'$, und zwar gleich $H' \times U'$, wenn der Körper $\Sigma = \Delta \cap \Omega$ in Δ' und in Ω' enthalten ist. Wie wir oben sahen, ist $\Sigma = \Delta_0 \cap \Omega_0$ und also in allen Δ_t und allen Ω_t für $t \geqq 0$ enthalten. Die Verzweigungsgruppe V_i ist die Invariantengruppe von $K_i = (\Delta_m, \Omega_n)$, und es ist also

$$V_i = V_{\Delta,m} \times V_{\Omega,n},$$

wo m und n die gleiche Bedeutung wie in Satz IV haben. Die zu den Gruppen V_i gehörigen Verzweigungsexponenten lassen sich mittels (8) und (8′) berechnen, da die $\mathfrak{P}$-Höhen von K_i/k und die Relativgrade $(K : K_i)$ bekannt sind.

Enthalten $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ ein vom Einsideal verschiedenes gemeinsames Ideal, so läßt sich nicht mehr so viel sagen. Man wird dann, falls $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) \neq \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k)$ ist, nach der gleichen Methode wie in Satz IV einige der Verzweigungskörper $K_s, K_{s-1}, \ldots$ bestimmen können, bis man zuerst zu einem $K_i = (\Delta_m, \Omega_n)$ mit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta_m/k) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega_n/k)$ kommt. Das Kompositum $(\Delta_{m-1}, \Omega_{n-1})$ ist dann offenbar in K_{i-1} enthalten. Es

kann aber ein echter Unterkörper von K_{i-1} sein oder sogar schon in einem niedrigeren Verzweigungskörper enthalten sein. Dieser letztere Fall bedeutet, daß $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ Ideale enthält — nämlich die $\mathfrak{P}$-Höhe von K_{i-1}/k — die weder in $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ noch in $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ vorkommen. Daß dieser Fall wirklich möglich ist, läßt sich leicht an dem Beispiel des Kompositums zweier relativ-zyklischer Körper vom Grade p sehen. Ein solches Beispiel werden wir in **13** behandeln. Daraus ergibt sich, daß, wenn $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ ein vom Einsideal verschiedenes gemeinsames Ideal enthalten, die Kenntnis der Verzweigungsgruppen und -exponenten in Δ/k und Ω/k zur Bestimmung der Verzweigungsgruppen und -exponenten im Kompositum $(\Delta, \Omega)/k$ nicht ausreichend ist.

11. Die $\mathfrak{P}$-Höhen der Zwischenkörper in K/k hängen mit den Artinführern von K über dem Trägheitskörper K_0 von $\mathfrak{P}$ zusammen. Sei E die Ordnung von T und p^{r_i} diejenige von V_i für $i = 1, \ldots, s$. Wir bilden die Idempotente

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E} \sum_{g \in T} g, \qquad \varepsilon_i = \frac{1}{p^{r_i}} \sum_{g \in V_i} g, \qquad i = 1, \ldots, s$$

und setzen

$$\varepsilon_i' = 1 - \varepsilon_i, \qquad i = 0, \ldots, s.$$

Für einen Charakter χ der Galoisgruppe G von K/k wird dann nach [1], [3] der Beitrag von $\mathfrak{p}$ zum Führer $f(\chi, K/k)$

$$f_{\mathfrak{p}}(\chi, K/k) = \mathfrak{p}^{\frac{1}{E}(E\chi(\varepsilon_s') + (L_1 - 1)p^{r_1}\chi(\varepsilon_1') + \cdots + (L_s - L_{s-1})p^{r_s}\chi(\varepsilon_s'))}.$$

Ist der Grundkörper gleich dem Trägheitskörper K_0, so liegen alle ε_i und alle ε_i' im Zentrum des Gruppenringes, und man hat folgende Zerlegung des Einselementes in orthogonale Idempotente:

$$1 = \varepsilon_s' + \varepsilon_s\varepsilon_{s-1}' + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_0' + \varepsilon_0.$$

Jede Darstellung und jeder Charakter χ der Trägheitsgruppe kann dementsprechend zerlegt werden:

$$\chi = \chi^{(s+1)} + \chi^{(s)} + \cdots + \chi^{(0)}. \tag{9}$$

$\chi^{(m)}$ heiße ein Charakter m-ter Stufe. Die zu $\chi^{(m)}$ gehörige Darstellung enthält nur die Hauptdarstellung von V_m, während sie die Hauptdarstellung von V_{m-1} überhaupt nicht enthält. Es ist

$$\chi^{(m)}(\varepsilon_\varrho') = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho \geqq m \\ \chi^{(m)}(1) & \text{für } \varrho < m. \end{cases}$$

Sei $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{P}^E$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in K_0. Für einen Charakter $\chi^{(s+1)}$ höchster Stufe ist dann

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\chi^{(s+1)}, K/K_0) = \mathfrak{P}^{\chi^{(s+1)}(1)(E + (L_1 - 1)p^{r_1} + \cdots + (L_s - L_{s-1})p^{r_s})}.$$

Für die Differente von K nach K_0 erhält man

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/K_0} = \mathfrak{P}^{(E - p^{r_1} + L_1(p^{r_1} - p^{r_2}) + \cdots + L_s(p^{r_s} - 1))}.$$

Dies ergibt

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\chi^{(s+1)}, K/K_0) = (\mathfrak{P}^{L_s}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}, K/K_0})^{\chi^{(s+1)}(1)} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k)^{\chi^{(s+1)}(1)}.$$

Ein Charakter $\chi^{(m)}$ mit $m < s+1$ kann als Charakter von T/V_m aufgefaßt werden und ist also Charakter höchster Stufe von K_m/K_0. Also gilt

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\chi^{(m)}, K/K_0) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_m/k)^{\chi^{(m)}(1)}.$$

Zerlegt man dann einen beliebigen Charakter χ von T nach (9), so ergibt sich

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\chi, K/K_0) = \prod_i \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)^{\chi^{(i)}(1)}. \tag{10}$$

Alle $\mathfrak{P}$-Höhen $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ sind Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k) = \mathfrak{P}^{\mu_{s+1}}$. Der $\mathfrak{p}_0$-Führer $f_{\mathfrak{p}_0}(\chi, K/K_0)$ wird also für jeden Charakter χ Teiler von $\mathfrak{P}^{\mu_{s+1}\chi(1)}$. Und zwar ist μ_{s+1} die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft; denn für einen Charakter χ der Stufe $s+1$ wird

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\chi, K/K_0) = \mathfrak{P}^{\mu_{s+1}\chi(1)}.$$

Ist dann Δ/K_0 ein relativ-galoisscher Zwischenkörper in K/K_0 und $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{P}^{\mu}$, so wird analog für jeden Charakter ψ der Gruppe von Δ/K_0 der Führer $f_{\mathfrak{p}_0}(\psi, \Delta/K_0)$ Teiler von $\mathfrak{P}^{\mu\psi(1)}$, und μ ist wieder die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft; d. h. es gibt Charaktere ψ, für die $f_{\mathfrak{p}_0}(\psi, \Delta/K_0) = \mathfrak{P}^{\mu\psi(1)}$ ist. Aus Satz IV folgt dann:

Satz V. *Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in dem relativ-galoisschen Körper K/k und K_0 der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Trägheitskörper und $\mathfrak{p}_0$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in K_0. Dann gibt es eine Folge ganzrationaler Zahlen μ_i mit $E \leqq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{s+1}$, so daß der Verzweigungskörper K_i von $\mathfrak{P}$ charakterisiert ist als der maximale relativ-galoissche Zwischenkörper in K/K_0 mit der Eigenschaft, daß der $\mathfrak{p}_0$-Führer eines jeden Charakters ψ seiner Gruppe Teiler von $\mathfrak{P}^{\mu_i\psi(1)}$ ist.*

Die Zahlen μ_i in Satz V sind nicht eindeutig bestimmt. Sie werden eindeutig, und zwar gleich dem Exponenten von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$, wenn man für jedes μ_i jeweils den kleinstmöglichen Wert wählt.

Der Führer $f(\chi, K/k)$ ist nach Artin [1] ein Ideal im Grundkörper k. Der schwierige Teil des Beweises hierfür besteht in dem Nachweis, daß jeder $\mathfrak{p}_0$-Führer von K/K_0 schon in K_0 liegt. Nach (10) ist dieses letztere äquivalent damit, daß die Ideale $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)^{\chi^{(i)}(1)}$ schon in K_0 liegen.

Ist insbesondere K/k relativ-abelsch, so gibt es Charaktere $\chi^{(i)}$ jeder Stufe i vom ersten Grade, d. h. es gilt:

Ist K/k relativ-abelsch, so liegen die Ideale von $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ schon in K_0.

Für eine relativ-abelsche Erweiterung K/k lassen sich weiter die Verzweigungskörper K_i schon über dem Grundkörper k durch die $\mathfrak{p}$-Führer charakterisieren. Sei Δ/k ein Zwischenkörper in K/k, Δ_0/k der Trägheitskörper in Δ/k, U die Galoisgruppe von Δ/k und $U_0 < U$ die Trägheitsgruppe von Δ/k. Da U abelsch ist, läßt sich jeder Charakter φ von U_0 in einen Charakter $\overline{\varphi}$ von U fortsetzen, derart, daß φ und $\overline{\varphi}$ auf U_0 übereinstimmen. Der Exponent von $\mathfrak{p}$ in $f_{\mathfrak{p}}(\overline{\varphi}, \Delta/k)$ hängt aber nur von den Werten des Charakters $\overline{\varphi}$ auf der Trägheitsgruppe U_0 ab. Ist also

$$f_{\mathfrak{p}_0}(\varphi, \Delta/\Delta_0) = \mathfrak{p}_0^{t_\varphi},$$

so wird

$$f_{\mathfrak{p}}(\overline{\varphi}, \Delta/k) = \mathfrak{p}^{t_\varphi}, \tag{11}$$

wo $\mathfrak{p}_0$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal in Δ_0 ist.

Mit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{P}^{\mu}$ ergibt Satz V die Ungleichung

$$t_\varphi \leqq \frac{\mu}{E}\varphi(1)$$

für jeden Charakter φ von U_0, wo das Gleichheitszeichen für wenigstens einen Charakter φ gilt. Weiter ist $\frac{\mu}{E} = \nu$ eine ganze Zahl, da $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k)$ in K_0 liegt.

Jeder Charakter ψ von U kann als Erweiterung $\overline{\varphi}$ eines Charakters φ von U_0 erhalten werden. Da $\overline{\varphi}(1) = \varphi(1)$ ist, besagt die zweite Formel (11), daß $f_{\mathfrak{p}}(\psi, \Delta/k)$ stets Teiler von $\mathfrak{p}^{\nu v(1)}$ ist und daß es Charaktere ψ gibt, für die $f_{\mathfrak{p}}(\psi, \Delta/k) = \mathfrak{p}^{\nu v(1)}$ ist. Ist dann $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k) = \mathfrak{P}^{\mu_i}$ und $\frac{\mu_i}{E} = \nu_i$, so ist Δ dann und nur dann in K_i enthalten, wenn $\nu_i \geqq \nu$ ist. Der Verzweigungskörper K_i ist also charakterisiert als der maximale Zwischenkörper von K/k mit der Eigenschaft, daß der $\mathfrak{p}$-Führer eines jeden Charakters ψ seiner Gruppe Teiler von $\mathfrak{p}^{\nu_i v(1)}$ ist. Dies ist die von Hasse [3], [4] angegebene Charakterisierung der Verzweigungskörper eines relativ-abelschen Körpers.

Die Höhe $\mathfrak{H}(K/k)$ eines relativ-abelschen Körpers K/k wird gleich dem endlichen Bestandteil $F(K/k)$ des Führers von K/k. Dieser letztere ist das kleinste gemeinsame Multiplum der Führer $f(\overline{\chi}, K/k)$ aller absolut irreduziblen Charaktere $\overline{\chi}$ der Gruppe G von K/k. Ist χ die Restriktion von $\overline{\chi}$ auf die Trägheitsgruppe, so ergibt (10), daß $f_{\mathfrak{p}_0}(\chi, K/K_0) = \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ ist, wenn χ ein Charakter der Stufe i ist. Setzt man dann $\Delta = K$ in (11), so folgt $f_{\mathfrak{p}}(\overline{\chi}, K/k) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$. Das kleinste gemeinsame Multiplum der $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K_i/k)$ ist gleich $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k)$, und daher wird $F(K/k) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k)$, d. h.

$$F(K/k) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(K/k) = \mathfrak{H}(K/k).$$

12. Mit Hilfe von Satz I und der bei dem Beweis dieses Satzes benutzten Hilfssätze lassen sich auch die Sätze von Ore [7] über die sog. Normalkongruenzen herleiten. Es handelt sich dabei um den Aufbau des Restklassenringes der ganzen Zahlen in K modulo $\mathfrak{P}^M$ für beliebiges $M > 0$. Diesen Ring erhält man nach Ore aus dem entsprechenden Ring in K_1 durch sukzessive Adjunktion der Wurzeln einer Reihe von Normalkongruenzen modulo $\mathfrak{P}^M$ vom Grade p, welche entweder sämtlich binomisch oder sämtlich trinomisch sind. Im binomischen Falle ist weiter nach Ore die erste Verzweigungsgruppe V_1 zyklisch.

Zum Beweis dieser Sätze benötigen wir einige Bemerkungen über relativ-zyklische Körper Ω/k vom Grade p. Wir setzen voraus, daß das Primideal $\mathfrak{P}$ Teiler von p und über k verzweigt ist, $\mathfrak{P}^p = \mathfrak{p}$, mit dem Verzweigungsexponenten L. Enthält k die p-te Einheitswurzel $\xi \neq 1$, so wird $\Omega = k(\vartheta)$, wo $\vartheta = \sqrt[p]{a}$ und a eine ganze Zahl aus k ist. Das Ideal $\mathfrak{l}$ in Lemma 4 wird gleich dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $(1 - \xi)$ und liegt schon in k; wir setzen $\mathfrak{l} = \mathfrak{P}^{\lambda}$, wo $\lambda \equiv 0(p)$ ist.

Die Wurzel ϑ kann so gewählt werden, daß entweder

$$(12) \qquad \begin{cases} \text{a) } \vartheta \text{ genau durch } \mathfrak{P} \text{ teilbar ist, } \vartheta = \Pi, \\ \text{oder} \\ \text{b) } \vartheta = 1 + \beta \Pi^{\lambda - L + 1} \text{ mit } \beta \not\equiv 0(\mathfrak{P}) \text{ ist.} \end{cases}$$

Der Fall a) *tritt dann und nur dann ein, wenn der Verzweigungsexponent L den Maximalwert $L = \lambda + 1$ hat.*

Wenn es ein durch $\mathfrak{P}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbares ϑ gibt, kann man es immer $\not\equiv 0(\mathfrak{P}^2)$ wählen, d. h. $\vartheta = \Pi$. Dann wird $\Pi^p - \Pi = (\xi - 1)\Pi$ durch $\mathfrak{l}\mathfrak{P}$ teilbar und also $L = \lambda + 1$.

Gibt es eine Wurzel ϑ, die nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so sei μ der höchste Exponent derart, daß $\vartheta \equiv c(\mathfrak{P}^{\mu})$ mit $c \in k$ ist. Dann wird $\vartheta = c + \beta' \Pi^{\mu}$, $\beta' \not\equiv 0(\mathfrak{P})$. Der Exponent μ ist $\not\equiv 0(p)$, denn sonst wäre ϑ auch modulo $\mathfrak{P}^{\mu+1}$ kongruent einer Zahl aus k. Also

wird $\vartheta^g - \vartheta$ genau durch $\mathfrak{P}^{\mu+L-1}$ teilbar. Andererseits ist $\vartheta^\varrho - \vartheta = (\xi - 1)\,\vartheta$ genau durch $\mathfrak{P}^\lambda$ teilbar. Also ist $L \leqq \lambda$ und $\mu = \lambda - L + 1$. Durch Multiplikation von ϑ mit einem $c' \in k$, für das $cc' \equiv 1 (\mathfrak{P}^\lambda)$ ist, erhält man die in b) angegebene Form, womit (12) bewiesen ist.

Insbesondere sieht man, daß es für $\xi \in k$ immer Körper Ω/k mit dem maximalen Verzweigungsexponenten $L = \lambda + 1$ gibt. Es sind dies die Körper $k\left(\sqrt[p]{a}\right)$, wo a genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.

Enthält k nicht die p-ten Einheitswurzeln, so ist λ nicht notwendigerweise durch p teilbar und kann sogar gebrochen sein. Allgemein gilt:

Es gibt dann und nur dann relativ-zyklische Körper vom Grade p über k mit dem maximalen Verzweigungsexponenten $L = \lambda + 1$, wenn das Ideal $\mathfrak{p}$ im Körper der p-ten Einheitswurzeln Σ/k über k unverzweigt ist und in Primideale ersten Grades zerfällt.

Denn existiere zuerst ein Körper Ω/k mit $L = \lambda + 1$. Sei $\Omega' = (\Omega, \Sigma)$ und $\mathfrak{P}'$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}$ in Ω'. Die Relativgrade $(\Omega : k) = p$ und $(\Sigma : k) = r$ sind prim zueinander, und also ist $(\Omega' : k) = pr$. Die Gruppe von Ω'/k ist das direkte Produkt der Gruppen $\{g\}$ von Ω/k und $\{h\}$ von Σ/k. Wir zeigen zuerst, daß Ω'/Σ vom Typ a) ist. Das Ideal $\mathfrak{P}'$ ist in Ω'/Ω nicht höher verzweigt. Im Zusammenhang mit (7) zeigten wir, daß dann die Verzweigungsgruppe $\{g\}$ von Ω/k mit der Verzweigungsgruppe von Ω'/k identifiziert werden kann. Der zu $\{g\}$ in Ω'/k gehörige Verzweigungsexponent ist der Verzweigungsexponent $L_{\Omega'/\Sigma}$ des relativ-zyklischen Körpers Ω'/Σ. Ist r' die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{P}'$ in Ω'/Ω, so folgt aus (7)

$$r' L = L_{\Omega'/\Sigma} + r' - 1.$$

Dies ergibt $L_{\Omega'/\Sigma} = r'\lambda + 1$. Das ist aber der maximale Wert über Σ, denn es ist $(p) \underset{\mathfrak{P}'}{=} \mathfrak{P}'^{(p-1)r'\lambda}$. Also ist Ω'/Σ vom Typ a), d. h. $\Omega' = \Sigma(\Pi')$ mit $g\Pi' = \xi\Pi'$. Ist dann

$$h\xi = \xi^\varrho,\ 1 < \varrho < p,$$

so ergibt sich

$$g(h\Pi') = hg\Pi' = h(\xi\Pi') = \xi^\varrho(h\Pi').$$

Also ist $h\Pi' = (\Pi')^\varrho b$ mit $b \in \Sigma$, und $h\Pi'$ kann wegen $1 < \varrho < p$ nicht genau durch $\mathfrak{P}'$ teilbar sein. Das Element h liegt also nicht in der Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}'$ und Σ wird der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}'$ in Ω'/k. Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist also unverzweigt in Σ und zerfällt in Primideale ersten Grades.

Gilt andererseits in Σ eine Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$, wo die $\mathfrak{P}_i$ voneinander verschiedene Primideale ersten Grades in Σ/k sind, so sei $\Omega' = \Sigma(\Pi')$, wo $\Pi' = \sqrt[p]{\Pi_k}$ und Π_k eine ganze Zahl aus k ist, die genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Da $\Pi_k \in k$ ist, wird Ω'/k relativ-abelsch vom Grade pr. Es gibt daher einen Zwischenkörper Ω/k mit $(\Omega : k) = p$. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Ω und $\mathfrak{P}'$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}$ in Ω'. Der Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}$ in Ω/k hat dann den Maximalwert $\lambda + 1$. Denn die Verzweigungsgruppe von Ω'/k läßt den Körper Σ elementweise invariant, ist also die Galoisgruppe von Ω'/Σ. Das Primideal $\mathfrak{P}$ ist in Ω'/Ω nicht verzweigt; also können die Verzweigungsgruppen von Ω'/k und Ω/k miteinander identifiziert werden. Nach (7) wird dann

$$L_{\Omega'/\Sigma} = L_{\Omega/k}.$$

Da Ω'/Σ vom Typ a) ist, hat $L_{\Omega'/\Sigma}$ den Maximalwert, also ist $L_{\Omega/k} = \lambda + 1$.

Wir betrachten nun wieder eine relativ-galoissche Erweiterung K/k. Es gilt [8], [7]:

Die Verzweigungsexponenten L_i des Primideals $\mathfrak{P}$ in K sind für $i \geqq 1$ untereinander kongruent modulo p.

Zum Beweis können wir annehmen, daß K die p-te Einheitswurzel $\xi \neq 1$ enthält. Denn ist dies nicht der Fall, so sei $K' = K(\xi)$ und $\mathfrak{P}'$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}$ in K'. Über K ist $\mathfrak{P}'$ nicht höher verzweigt, also gilt nach (7') für die Verzweigungsexponenten $L_{i,K'/k}$ von $\mathfrak{P}'$ in K'/k:

$$E'_K(L_{i,K/k} - L_{m,K/k}) = L_{i,K'/k} - L_{m,K'/k}.$$

Die Verzweigungsordnung E'_K von $\mathfrak{P}'$ über K ist nicht durch p teilbar. Daher reicht es, zu zeigen, daß die $L_{i,K'/k}$ untereinander kongruent modulo p sind. Man kann also von vornherein $\xi \in K$ voraussetzen.

Sei dann $v \neq 1$ ein Element der höchsten Verzweigungsgruppe V_s und Δ der zu $\{v\}$ gehörige Invariantenkörper, $(K : \Delta) = p$. Der Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}$ in K/Δ ist gleich L_s. Sei $K = \Delta(\vartheta)$, wo ϑ nach (12) normiert ist. Es ist $v\vartheta = \xi\vartheta$. Das Element v liegt im Zentrum von V_1. Die Einheitswurzel ξ liegt in K_1, ist also bei allen $g \in V_1$ invariant. Also gilt für $g \in V_1$ auch $v\vartheta^g = \xi\vartheta^g$. Daher liegt $\frac{\vartheta^g}{\vartheta}$ und damit auch $\frac{\vartheta^g - \vartheta}{\vartheta} = \delta$ schon in Δ. Ist dann $L_s \equiv 1\,(p)$, so wird K/Δ nach dem Korollar zu Lemma 5 vom Typ a), d. h. $\vartheta = \Pi$. Mit $e_{\mathfrak{P}}(g, K) = L_i$ wird δ genau durch $\mathfrak{P}^{L_i - 1}$ teilbar. Aus $\delta \in \Delta$ und $\mathfrak{P}_\Delta = \mathfrak{P}^p$ folgt dann, daß $L_i \equiv 1\,(p)$ ist für alle $i \geqq 1$. Ist $L_s \not\equiv 1\,(p)$, so wird K/Δ vom Typ b) und $\vartheta \not\equiv 0(\mathfrak{P})$. Dann wird δ genau durch $\mathfrak{P}^{\lambda - L_s + L_i}$ teilbar. Wegen $\lambda \equiv 0(p)$ folgt auch hier $L_s \equiv L_i\ (p)$ für alle $i \geqq 1$.

Der Fall, daß die Verzweigungsexponenten $L_i \equiv 1\,(p)$ sind, ist, wie wir sehen werden, der binomische Fall von Ore. Es gilt:

Sind die Verzweigungsexponenten L_i von $\mathfrak{P}$ in K/k kongruent 1 modulo p, so ist V_1 zyklisch von der Ordnung p^s. Ist $\mathfrak{l} = \mathfrak{P}^\lambda$, so wird

$$L_i = 1 + \frac{\lambda}{p^{s-i}} \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Sei $v_1 \in V_1$, aber $v_1 \notin V_2$. Wir haben zu zeigen, daß $\{v_1\} = V_1$ ist. Die Verzweigungsgruppe V_{s+1} besteht nur aus dem Einselement, ist also in $\{v_1\}$ enthalten. Wäre $\{v_1\} \neq V_1$, so gäbe es eine höchste Verzweigungsgruppe V_i mit $1 \leqq i \leqq s$, die nicht in $\{v_1\}$ enthalten ist. Sei $g \in V_i$ und $g \notin \{v_1\}$. Die Gruppe (V_{i+1}, g) bestimmt einen Unterkörper Ω von K_{i+1} mit $(K_{i+1} : \Omega) = p$. Der Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}_{K_{i+1}}$ in K_{i+1}/Ω ist nach (5') gleich L_i und daher kongruent 1 modulo p. Nach dem Korollar zu Lemma 5 wird dann

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, K_{i+1}) = \mathfrak{P}_{K_{i+1}}^{L_i} = \mathfrak{l}\,\mathfrak{P}_{K_{i+1}}. \tag{13}$$

Das Element v_1 erzeugt in V_1/V_{i+1} eine zyklische Gruppe der Ordnung p^ν, $\nu > 0$. Es gibt also ein $v \in \{v_1\}$, das in V_1/V_{i+1} die Ordnung p hat. Sei Δ der zu (V_{i+1}, v) gehörige Unterkörper von K_{i+1}. Nach Satz I' ist

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta) = \mathfrak{l}\,\mathfrak{P}_{K_{i+1}}\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(gv, K_{i+1}) \cdots \mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(gv^{p-1}, K_{i+1}).$$

Die Elemente gv^t liegen in V_1, und nach dem Korollar zu Lemma 2 wird $\mathfrak{P}_{K_{i+1}}$ echter Teiler von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g\,v^t, K_{i+1})$. Also wird $\mathfrak{l}\,\mathfrak{P}_{K_{i+1}}^p = \mathfrak{l}\,\mathfrak{P}_\Delta$ echter Teiler von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{P}}(g, \Delta)$. Dies ist nach Lemma 4 nur dann möglich, wenn g zur Invariantengruppe (V_{i+1}, v) von Δ gehört. Diese Invariantengruppe ist aber schon in $\{v_1\}$ enthalten; also müßte g in $\{v_1\}$ liegen, gegen die Voraussetzung. Also ist $V_1 = \{v_1\}$, wie behauptet.

Die Ordnung von V_{s+1} wird gleich p^{s-i} und $\mathfrak{P}_{K_{i+1}} = \mathfrak{P}^{p^{s-i}}$. Die Werte der Verzweigungsexponenten L_i ergeben sich dann aus (13).

Um zu den Normalkongruenzen zu kommen, untersuchen wir zuerst den Restklassenring modulo $\mathfrak{P}^M$ für beliebiges $M > 0$ in einem relativ-zyklischen Körper Ω/k vom Grade p. Dieser Restklassenring entsteht aus dem entsprechenden Ring in k durch Adjunktion der von Π modulo $\mathfrak{P}^M$ erzeugten Restklasse, wo Π wieder eine genau durch $\mathfrak{P}$ teilbare ganze Zahl in Ω ist. Wählen wir dann eine beliebige, genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl Π_k in k, so gilt:

Die Zahl Π kann so in Ω gewählt werden, daß sie für $L \equiv 1\,(p)$ Wurzel einer Kongruenz

$$x^p - \Pi_k \beta \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}^M) \tag{14}$$

und für $L \not\equiv 1\,(p)$ Wurzel einer Kongruenz

$$x^p + x^m \Pi_k^c \beta - \Pi_k \gamma \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}^M) \tag{14'}$$

ist. Hier sind β und γ ganze, nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahlen in k. Für die Exponenten in (14') gilt weiter

$$pc + m = (p-1)\,L + 1 \quad \textit{mit} \quad 0 < m \leqq p - 1.$$

Ist zuerst $L \equiv 1\,(p)$, so sei Σ/k der Körper der p-ten Einheitswurzeln, $\Omega' = (\Omega, \Sigma)$ und $\mathfrak{P}'$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}$ in Ω'. Dann wird Ω'/Σ vom Typ a), also $\Omega' = \Sigma(\Pi')$, und Π' ist eine Wurzel der Gleichung

$$x^p - a = 0,$$

wo a eine genau durch $\mathfrak{P}'^p_\Sigma$ teilbare ganze Zahl in Σ ist. Wie wir gezeigt haben, ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt in Σ/k und zerfällt in Primideale ersten Grades. Also gibt es eine ganze Zahl β in k mit $a \equiv \Pi_k \beta\,(\mathfrak{P}'^M)$. Weiter ist auch $\mathfrak{P}$ in Ω'/Ω unverzweigt und zerfällt in Primideale ersten Grades. Also gibt es ein $\Pi \in \Omega$ mit $\Pi' \equiv \Pi\ (\mathfrak{P}'^M)$. Aus der Gleichung für Π' oben folgt dann, daß Π Wurzel einer Kongruenz (14) ist.

Für $L \not\equiv 1\,(p)$ wird der Beweis etwas komplizierter. Wir wenden Induktion nach M an und zeigen zuerst, daß die Behauptung für $M \leqq (p-1)L + 2$ richtig ist. Nach Lemma 5 ist

$$\Pi_k \equiv (\Pi_\Omega^p + \cdots) + (\alpha \Pi_\Omega^{(p-1)L+1} + \cdots) \qquad (\mathfrak{l}^{p-1}\mathfrak{P}^p)$$

mit $\alpha \in k$ und $\alpha \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Hier ist Π_Ω eine beliebige ganze, genau durch $\mathfrak{P}$ teilbare Zahl in Ω, die nur der Bedingung $\Pi_k \equiv \Pi_\Omega^p (\mathfrak{P}^{p+1})$ unterworfen ist. Die erste Klammer wird modulo $\mathfrak{l}^{p-1}\mathfrak{P}^p$ kongruent einer p-ten Potenz Π^p. Wählen wir dieses Element Π anstatt Π_Ω, so folgt

$$\Pi^p + (\alpha \Pi^{(p-1)L+1} + \cdots) - \Pi_k \equiv 0 \qquad (\mathfrak{l}^{p-1}\mathfrak{P}^p).$$

Da $\mathfrak{P}^L$ Teiler von $\mathfrak{l}$ ist, kann der Modul hier durch $\mathfrak{P}^{(p-1)L+2}$ ersetzt werden. Dann wird

$$\Pi^{(p-1)L+1} \equiv \Pi_k^c \Pi^m \qquad (\mathfrak{P}^{(p-1)L+2}),$$

und man erhält eine Kongruenz (14') für Π mit $M = (p-1)\,L + 2$.

Wir nehmen dann an, daß die Behauptung schon für $M = (p-1)\,L + u$ mit $u \geqq 2$ bewiesen sei. Für den nächsthöheren Exponenten sei

$$\Pi^p + \beta \Pi_k^c \Pi^m - \gamma \Pi_k \equiv \delta \Pi_k^c \Pi^{m+u-1} \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}), \tag{15}$$

wo δ eine ganze Zahl aus k ist. Hieraus folgt

$$\Pi^{pu} \equiv \Pi_k^u \gamma^u + \cdots \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}),$$

wo die Punkte Glieder bezeichnen, die auf jeden Fall durch $(\Pi_k^{u-1+c}\Pi^m) \mathfrak{P}^{M+1-u+p(u-1)}$ teilbar sind. Da $u \geqq 2$ ist, wird $p(u-1)-u \geqq 0$ und also

$$\Pi^{pu} \equiv \Pi_k^u \gamma^u \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}).$$

Setzt man dann $\Pi' = \Pi + \tau\Pi^u$, wo τ eine ganze Zahl aus k ist, so folgt

$$\Pi'^p = \Pi^p + \cdots + \tau^p \Pi^{pu}.$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind auf jeden Fall durch $\mathfrak{l}^{p-1}\mathfrak{P}^{p+u-1}$ teilbar. Da $\mathfrak{P}^L$ Teiler von $\mathfrak{l}$ ist, wird $\mathfrak{P}^{M+1} = \mathfrak{P}^{(p-1)L+u+1}$ Teiler von $\mathfrak{l}^{p-1}\mathfrak{P}^{p+u-1}$, also

$$\Pi'^p \equiv \Pi^p + \tau^p \Pi^{pu} \equiv \Pi^p + \tau^p \gamma^u \Pi_k^u \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}).$$

Weiter wird

$$\Pi_k^c \Pi'^m \equiv \Pi_k^c \Pi^m + m\tau \Pi_k^c \Pi^{m+u-1} \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}).$$

Mit $\gamma' = \gamma + \tau^p \gamma^u \Pi_k^{u-1}$ ergibt dann (15)

$$\Pi'^p + \beta\Pi_k^c \Pi'^m - \Pi_k \gamma' \equiv (\delta + m\tau\beta)\, \Pi_k^c \Pi^{m+u-1} \qquad (\mathfrak{P}^{M+1}).$$

Da $m \not\equiv 0$ (p) und $\beta \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ ist, kann man immer τ so wählen, daß die rechte Seite modulo $\mathfrak{P}^{M+1}$ verschwindet. Dann erhält man eine Kongruenz (14′) für den Modul $\mathfrak{P}^{M+1}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir betrachten dann wieder eine relativ-galoissche Erweiterung K/k. Der Grundkörper k sei gleich dem ersten Verzweigungskörper K_1 von $\mathfrak{P}$. Mit Hilfe einer Kompositionsreihe von V_1 erhält man eine Reihe von Zwischenkörpern $\Omega^{(n)}$:

$$k = \Omega^{(0)} < \Omega^{(1)} < \cdots < \Omega^{(N)} = K,$$

wo $\Omega^{(n+1)}/\Omega^{(n)}$ relativ-zyklisch vom Grade p ist. Der Restklassenring der ganzen Zahlen in K modulo $\mathfrak{P}^M$ läßt sich dann in N Schritten aufbauen, indem man sukzessive Elemente $\Pi_{n+1} \in \Omega^{(n+1)}$ adjungiert, die den entsprechenden Restklassenring von $\Omega^{(n+1)}$ über dem von $\Omega^{(n)}$ erzeugen. Jedes Π_{n+1} wird dann als Wurzel einer Kongruenz

$$x^p - \beta_n \Pi_n \equiv 0 \ (\mathfrak{P}^M) \tag{16}$$

oder

$$x^p + x^{m_n} \Pi_n^{c_n} \beta_n - \Pi_n \gamma_n \equiv 0 \ (\mathfrak{P}^M) \tag{16′}$$

gewählt werden können, je nachdem, ob der Verzweigungsexponent $L_{\Omega^{(n+1)}/\Omega^{(n)}}$ von $\mathfrak{P}_{\Omega^{(n+1)}}$ in $\Omega^{(n+1)}/\Omega^{(n)}$ kongruent 1 modulo p ist oder nicht. Die β_n und γ_n sind hier ganze Zahlen aus $\Omega^{(n)}$. Wählt man insbesondere eine Kompositionsreihe für V_1, die eine Verfeinerung der Reihe

$$V_1 > V_2 > \cdots > V_{s+1} = \{1\}$$

ist, so liegt jeder Körper $\Omega^{(n)}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verzweigungskörpern K_i und K_{i+1}. Nach (5′) wird dann $L_{\Omega^{(n+1)}/\Omega^{(n)}} = L_i$ und alle diese Verzweigungsexponenten sind untereinander kongruent modulo p.

Ist also $L_i \equiv 1$ (p), so liegt der binomische Fall vor. Man erhält den Restklassenring modulo $\mathfrak{P}^M$ in K durch N sukzessive Adjunktionen von Wurzeln binomischer Kongruenzen (16). Ist $L_i \not\equiv 1$ (p), so liegt der trinomische Fall vor, und man hat jedesmal die Wurzel einer trinomischen Kongruenz (16′) zu adjungieren. Die Exponenten m_n sind in diesem Falle alle gleich, denn m_n ist der kleinste positive Rest modulo p von $1 - L_{\Omega^{(n+1)}/\Omega^{(n)}} = 1 - L_i$, und die L_i sind untereinander kongruent modulo p.

13. Wir wollen zuletzt noch im Anschluß an **10** ein Beispiel für das Kompositum zweier relativ-zyklischer Körper vom Grade p geben. Der Grundkörper k enthalte die p-ten Einheitswurzeln. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von p in k und Π_k eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl in k, so setzen wir $\Delta = k(\sqrt[p]{\Pi_k})$. Nach (12) ist dann $\mathfrak{p}$ verzweigt in Δ/k und der zugehörige Verzweigungsexponent $L_{\Delta/k}$ hat den Maximalwert. Ist das Ideal $(1-\xi)$ genau durch $\mathfrak{p}^\varrho$ teilbar, so wird $L_{\Delta/k} = p\varrho + 1$. Sei a eine ganze, nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl in k, die in k nicht p-te Potenz ist. Wir setzen $\Omega = k(\sqrt[p]{\Pi_k a})$. Genau wie oben sieht man, daß $\mathfrak{p}$ in Ω/k verzweigt ist mit $L_{\Omega/k} = p\varrho + 1$. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ im Kompositum $K = (\Delta, \Omega)$. Es ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}_\Delta}(\Delta/k) = \mathfrak{P}_\Delta^{(p\varrho+1)p}$ und also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} \mathfrak{p}^{p\varrho+1}$. Analog ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Omega/k) \underset{\mathfrak{P}}{\sim} \mathfrak{p}^{p\varrho+1}$. Die Wertevorräte $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ sind also gleich und bestehen beide aus dem Einsideal und dem Beitrag von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{p}^{p\varrho+1}$.

Das Kompositum K enthält den Körper $\Sigma = k(\sqrt[p]{a})$. Ist $\mathfrak{p}$ in Σ/k unverzweigt, so wird $K_0 = K_1 = \Sigma$ und $K_2 = K$. Der Wertevorrat $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ besteht dann genau aus den Idealen von $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ und $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$, aber der Verzweigungskörper $K_1 = \Sigma$ ist nicht von der Form (Δ_m, Ω_n).

Ist $\mathfrak{p}$ verzweigt in Σ/k, so gibt es in K/k keinen von k verschiedenen Unterkörper, in dem $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist. Dies bedeutet $K_0 = K_1 = k$ und $\mathfrak{P}^{p^s} = \mathfrak{p}$. Der Verzweigungsexponent von $\mathfrak{P}_\Sigma$ in Σ/k ist $\leqq p\varrho$, denn Σ/k ist vom Typ b) in (12). Weiter ist $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}_\Sigma}(\Sigma/k) = \mathfrak{P}_\Sigma^{pL} = \mathfrak{p}^L$ und also $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Sigma/k) = \mathfrak{p}^L$. Diese $\mathfrak{P}$-Höhe ist ein echter Teiler von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{P}}(\Delta/k) = \mathfrak{p}^{p\varrho+1}$ und daher wird $K_2 = \Sigma$ und $K_3 = K$. Der Wertevorrat $[K/k]_{\mathfrak{P}}$ enthält das Ideal $\mathfrak{p}^L$, welches weder in $[\Delta/k]_{\mathfrak{P}}$ noch in $[\Omega/k]_{\mathfrak{P}}$ vorkommt.

Wenn a variiert, durchläuft Σ/k alle relativ-zyklischen Körper vom Grade p über k, die entweder vom Typ b) sind oder in denen $\mathfrak{p}$ nicht verzweigt ist. Dagegen sind die Verzweigungsgruppen und -exponenten in Δ/k und Ω/k unabhängig von a. Hieraus geht hervor, daß die Kenntnis der Verzweigungsgruppen und -exponenten in Δ/k und Ω/k zur Bestimmung der Verzweigungsgruppen und -exponenten im Kompositum K/k nicht ausreichend ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *E. Artin*, Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. J. f. d. reine und angewandte Math. **164** (1931).

[2] *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil Ia, Jahresber. d. deutschen Mathematikervereinigung **36** (1927).

[3] *H. Hasse*, Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper, J. f. d. reine und angewandte Math. **162** (1930).

[4] *H. Hasse*, Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendung auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper, Journ. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sect. I, **2** (1934).

[5] *H. Hasse*, Artinsche Führer, Artinsche L-Funktionen und Gaußsche Summen über endlich-algebraischen Zahlkörpern, Acta Salmanticensia 1954.

[6] *J. Herbrand*, Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, J. de Mathématiques **10** (1931).

[7] *Ö. Ore*, Abriß einer arithmetischen Theorie der Galoisschen Körper, Erste Mitteilung, Math. Annalen **100** (1928), Zweite Mitteilung, Math. Annalen **102** (1930).

[8] *A. Speiser*, Die Zerlegungsgruppe. J. f. d. reine und angewandte Math. **149** (1919).

Eingegangen 26. Juni 1961.

Eine Ergänzung zu meiner Arbeit über gruppentheoretische schiefe Produkte.

Von *Ladislaus Rédei* in Szeged (Ungarn).

Herr Szendrei machte mich darauf aufmerksam, daß in meiner Arbeit „Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie" [dieses Journal **188** (1950), 201—227] der Beweis von (40_2) ungenügend ist. Ein vollständiger Beweis lautet so:

Die zu beweisende Gleichung heißt

$$(e, \alpha)\,(\alpha^{-\alpha^{-1}}, \alpha^{-1}) = (e, \varepsilon).$$

Die linke Seite berechnet sich nach (22), (23) zu

$$\left((\alpha^{-\alpha^{-1}})^{\alpha}\,(\alpha^{-1})^{\alpha},\ \alpha^{\alpha^{-\alpha^{-1}}\alpha^{-1}}\right),$$

also hat man

$$\text{(A)} \qquad (\alpha^{-\alpha^{-1}})^{\alpha}(\alpha^{-1})^{\alpha} = e, \qquad \alpha^{\alpha^{-\alpha^{-1}}} = \alpha$$

zu beweisen.

Für $b = \alpha^{-\alpha^{-1}}$, $\beta = \alpha^{-1}$ gilt $b = \alpha^{-\beta}$, d. h. $b\alpha^{\beta} = e$. Somit ergibt sich aus (32_2) für $\gamma = \alpha$:

$$\alpha^{e} = \alpha^{\alpha^{-\alpha^{-1}}}.$$

Da die linke Seite nach (23) gleich α ist, so folgt hieraus (A_2).

Es sei $b = \alpha^{-\alpha^{-1}}$, $c = \alpha^{\alpha^{-1}} (= b^{-1})$. Nach der schon bewiesenen Beziehung (A_2) bzw. nach (25_2) gelten dann

$$\alpha^{b} = \alpha, \qquad b^{c} = \varepsilon.$$

Also ergibt (26_1)

$$b^{\alpha}c^{\alpha} = e^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}.$$

Wegen (23) folgt hieraus $b^{\alpha}c^{\alpha} = e$, d. h. $(\alpha^{-\alpha^{-1}})^{\alpha}(\alpha^{\alpha^{-1}})^{\alpha} = e$.

Andererseits wenden wir (28_1) mit $\beta = \alpha^{-1}$, $\gamma = \alpha$ an. So entsteht

$$(\alpha^{-1})^{\alpha}\alpha^{\varepsilon} = (\alpha^{\alpha^{-1}})^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}.$$

Wegen (23) lautet dies (nach Vertauschung der Seiten)

$$(\alpha^{\alpha^{-1}})^{\alpha} = (\alpha^{-1})^{\alpha}.$$

Die Einsetzung in obige Gleichung führt zu (A_1) [1].

[1]) Berichtigung von Druckfehlern in obiger Arbeit: In den Gleichungen (26_2) und (29_2)ist $(\gamma^{\beta})^{\alpha}$ durch $(\gamma\beta)^{\alpha}$ bzw. α durch a zu ersetzen.

Eingegangen 30. Januar 1961.

On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. III.[11])

By *M. Z. v. Krzywoblocki* at East Lansing (Mich., U.S.A.)

4. Application to Boundary Layer.

The proof given above refers to a simply-connected domain $T + S$. The most important application of viscous fluid theory is the boundary layer theory, in which one is usually confronted with the two curve boundary value problem, i. e., one set of conditions is given at the surface and the other at infinity.

From this point of view, it is difficult to arrive at a rigorous comparison between the results obtained above and the phenomena in the boundary layer. However, it may be useful to obtain some insight into the problems of the existence of the flow of the compressible boundary layer.

With this in mind, one of the available solutions of the boundary layer system of equations will be compared with the solution found above. Obviously, the result of this comparison may be interpreted only as a general trend in the solution of the boundary layer equations and not as a definite result. At first, certain results will be quoted from the theory of the boundary layer in an incompressible fluid flow. Concerning the question of existence, there is no existence proof available referring to the solution of the boundary layer equations in the physical (x, y)- or (x, y, z)-space involving two curve boundary conditions either in the incompressible or compressible fluid flow domain. An often used technique for obtaining a solution of the boundary layer equations involves a transformation of coordinates to reduce the number of independent variables. In particular, this method was applied by Blasius in his well-known paper. The starting point in the Blasius approach is a system of partial differential equations of the Navier-Stokes type, describing the steady, two-dimensional motion in a laminar boundary layer, subject to "two-curve" boundary conditions. Blasius introduced the notion of a stream function, obtained one partial differential equation subject to "two-curve" boundary conditions and applied a transformation of a specific form, resulting in an ordinary differential equation (called Blasius' equation) subject to two-point boundary conditions. By this operation, the number of dimensions of the original space, in which the physical phenomena described by the original partial differential equation take place was reduced by one. It is well known that this procedure leads to a transformation which is not one-to-one and the Jacobian of the transformation vanishes identically. This has been emphasized in the literature in the particular case of the boundary layer (v. Krzywoblocki). This implies

[11]) Parts I and II of this work see this journal **206** (1961), 175—191 and **207** (1961), 113—128, respectively. References see at the end of Part I.

that while proofs of existence, uniqueness and convergence may be derived in the space of the reduced dimensions, one is unable to transfer those results to the original space, at least as long as one considers the boundary conditions. It is beyond the scope of the present work to discuss the methods which enable one to prove that a solution of the equations in question in the space of the reduced dimensions is a solution in the original space. Such methods exist and are based on the application of the theory of invariant groups to the theory of differential equations (G. Birkhoff, A. D. Michal, A. J. A. Morgan, M. Z. v. Krzywoblocki, etc.), but in these cases one cannot consider any boundary conditions. In solving his equation in the space of the reduced dimensions, Blasius made use of the power series taken about the origin and of a certain asymptotic expression for large values of the argument, adjusting a constant so as to make both expressions dovetail in a middle region. Blasius derived a recursive formula for the coefficients of the power series of the form:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{(3n+2)}, \tag{4.1a}$$

where

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{3n-1}{3\nu} c_\nu c_{n-1-\nu}, \quad \alpha = \text{const.} \tag{4.1b}$$

Concerning the convergence, Blasius mentioned that in his power series he had inserted in the denominator of each term the expression $(3n+2)!$ It was Weyl [13], who had shown that the convergence of the Blasius power series stops somewhere between the following values of the independent variable: $\sqrt[3]{9} = 2.08$ and $\sqrt[3]{30} = 3.11$. These bounds were refined by Oudart [11], $2.884 < \eta < 3.203$ and Ostrowski [10], $3.1 < \eta < 3.18$. Thus Weyl [13] maintains that the Blasius method, which has been followed later in many similar cases, can yield results of limited accuracy only, and that the mathematician remains in doubt whether the solution extends over the whole interval of $\eta \geqq 0$. The reasoning of Weyl is as follows:

The coefficients c_n of the Blasius solution can be written in a transformed form

$$f(\eta) = \sum (-1)^n c_n \eta^{3n+2} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.2}$$

and are determined by the recursive formula:

$$(3n+2)(3n+1)\,3nc_n = 2\sum (3i+2)(3i+1)\,c_i c_k \quad (i+k = n-1), \tag{4.3}$$

where $c_0 = \frac{1}{2}$. One may notice that:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (3i+2)(3i+1) = n(3n^2-1), \tag{4.4}$$

and

$$\frac{1}{30} \leqq \frac{3n^2-1}{3(3n+2)(3n+1)} \leqq \frac{1}{9}, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Hence the inequalities

$$c_i \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^i, \quad c_i \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{30}\right)^i, \tag{4.6}$$

for $i = 0, \ldots, n-1$, imply the same for $i = n$. Since they hold for $i = 0$, Weyl's statement is proved in the form:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{30}\right)^n \leqq c_n \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n. \tag{4.7}$$

To avoid the possible divergence of the Blasius series, Weyl [14] proposed his own solution of the Blasius equation in the form of an alternating series. Blasius equation is of the form:

$$f'''(z) + 2f(z)\,f''(z) = 0, \tag{4.8}$$

together with the initial conditions $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, and end condition $f' = V$ with $z \to \infty$. With $g(z) = f''(z)$ or:

$$g(z) = \exp\left[-\int_0^z (z-\xi)^2 g(\xi)\,d\xi\right], \quad \text{or:} \quad g = \Phi\{g\}, \tag{4.9}$$

where Φ denotes the functional operator, Weyl constructs an alternating series ("alternating pincer movement"), g_n, such that:

$$g_0 \leqq g_1;\ g_1 \geqq g_2;\ g_2 \leqq g_3;\ g_3 \geqq g_4, \ldots \tag{4.10}$$

$$g_0 \leqq g_2;\ g_1 \geqq g_3;\ g_2 \leqq g_4;\ g_3 \geqq g_5, \ldots \tag{4.11}$$

All the odd g_n are above even g_n, the odd g_n move down, the even g_n go up with increasing n. Moreover, Weyl finds by induction with respect to n that the following is true:

$$0 \leqq (-1)^n\left(g_{n+1}(z) - g_n(z)\right) \leqq \frac{(2z^3)^n}{(3n)!}, \tag{4.12}$$

or

$$\left|\, g_{n+1}(z) - g_n(z)\right| \leqq \frac{(2z^3)^n}{(3n)!}. \tag{4.13}$$

In the Weyl approach the function f refers to the stream-function defined by:

$$\psi(x, y) = 2\sqrt{x}\,f\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x}f(z). \tag{4.14}$$

After these preliminary remarks one can return to the problem of the boundary layer in a viscous compressible fluid flow.

Summarizing the previous results, when the problems involving two curve boundary conditions attached to partial differential equations (in particular, of the hydrodynamic nature) are considered and the transformation to ordinary equation is used, one is unable to show the existence of the flow either using the ordinary transformation technique, i. e., transforms of functions and their derivatives from one space into another (vanishing Jacobian), or using the algebraic methods (the lack of the notion of boundary conditions in such a technique). As mentioned in the literature (v. Krzywoblocki) certain hopes in that direction seem to be offered by the possible future development of topology in a more applicable sense. But in order to throw some light upon the existence problem in the present case, below a new (at least in the fluid dynamics theory) technique will be applied which may be called the technique of dominating series. This is as follows: in the original space there is a proof of existence (Chapter 3) with the boundary conditions satisfied on the curve S. The series obtained there is assumed to be a dominating series for a series transferred from the space of the reduced number of dimensions thus embedding the latter one into the existence proof of the viscous fluid flow in the original, physical space. As a by-product of the formalism it will be shown that the boundary conditions on the second curve are automatically satisfied. The technique works astonishingly well in the particular case of the chosen structure of the mutual relation between the independent variables $\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$, but obviously there may be other cases in which it will work as well.

In Chapter 3 it was shown that under certain conditions, given by the inequalities on the variable functions of the dynamic system in question, the flow and the thermodynamic phenomena exist and satisfy certain boundary conditions on the curve S. The philosophy of the procedure below is as follows. Taking any solution of the equation of the boundary layer in the space of reduced number of dimensions, will furnish the velocity temperature, pressure and density distributions in the dynamic system in question. One may proceed in either of two possible directions:

(i) One may try to return with a solution from the space of reduced number of dimensions to the original space. Since the transformation of coordinates is not one-to-one, the ordinary tool of the function analysis (with a Jacobian) cannot be used but one may require that at least the solutions, satisfying "two-point" boundary conditions in the space of reduced number of coordinates, expressed in terms of the coordinates of the original space are imbedded in the class of functions satisfying the most general flow conditions in the original space with S-curve boundary conditions, as derived in Chapter 3. If one is able to find such a procedure then there will be an assurance that a solution rigorously exists in the original space (as proved above), and has a meaning.

Concerning the uniqueness it appears that when the present techniques are used in both the original and the reduced spaces, nothing more definite can be said.

(ii) The second possibility would be to proceed in the opposite direction, i. e., to apply some of the results derived in Chapter 3 to the solution in the space of the reduced number of dimensions and to seek there additional conditions which should be satisfied in order that the solution be valid when expressed in terms of the coordinates of the original space.

Only the first possibility was elaborated in the present case and will be discussed below.

Assume a classical system of two equations describing a flow of a compressible viscous fluid in two-dimensional boundary layer region with the conventional assumption of $p = \text{const.}$:

$$u u_{,x} + v u_{,y} = \varrho^{-1}(\mu u_{,y})_{,y}; \qquad (\varrho u)_{,x} + (\varrho v)_{,y} = 0;$$

since $p = \text{const.}$, the density ϱ can be calculated from the equation of state with the temperature calculated from the energy equation. Using some sort of a modification of the well-known von Mises transformation, the author will show that the two above equations of the partial differential nature are reducible to an ordinary differential equation. Introduce the very often used relation $\mu\varrho = 1$ (see works by Howarth, von Mises, Kuerti, etc.) and a new independent variable η, related to the (x, y)-coordinates by means of a not one-to-one relation (obtainable from the von Mises transformation, as Kuerti has shown):

$$d\eta = \frac{1}{2} \cdot \varrho d(x^{-\frac{1}{2}} y); \quad y = 2x^{\frac{1}{2}} \int_0^{\eta} \varrho^{-1} d\eta^*, \text{ at constant } x; \quad \eta = \int \varrho d\left(\frac{1}{2} \cdot y x^{-\frac{1}{2}}\right);$$

(y, x) independ.;

also the streamfunction:

$$\psi = x^{\frac{1}{2}} z(\eta); \quad u = \varrho^{-1} \psi_{,y}; \quad v = -\varrho^{-1} \psi_{,x};$$

this implies that the continuity equation is identically satisfied. From the above we have (for details see Kuerti's work):

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} \varrho;$$

$$u = \varrho^{-1} x^{\frac{1}{2}} z' \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} \varrho = \frac{1}{2}\, z';$$

$$v = -\varrho^{-1}\left(\frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} z + x^{\frac{1}{2}} z' \frac{\partial \eta}{\partial x}\right);$$

$$u_{,x} = \frac{1}{2}\, z'' \frac{\partial \eta}{\partial x};\quad u_{,y} = \frac{1}{4}\, x^{-\frac{1}{2}} \varrho z'';$$

substituting these expressions into the first equation of the system one gets:

$$\frac{1}{4}\, z' z'' \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{8}\, x^{-1} z z'' - \frac{1}{4}\, z' z'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \varrho^{-1}\left(\mu \varrho \frac{1}{4}\, x^{-\frac{1}{2}} z''\right)_{,y} = \frac{1}{4}\, \varrho^{-1} x^{-\frac{1}{2}} z''_{,y}$$

$$= \frac{1}{4}\, \varrho^{-1} x^{-\frac{1}{2}} z''' \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} \varrho,$$

or

$$z''' + z z'' = 0 \text{ (Blasius equation).}$$

The principal theorem proved by Michael (see his papers in the Proceedings of the National Academy of Sciences, Morgan's dissertation, etc.) states that a fundamental solution (without boundary conditions) of the above equation on the η-line is a fundamental solution of the original equation in the (x, y)-plane from which the equation in $\{\eta\}$ was derived. Briefly, a fundamental solution of the Blasius equation is a fundamental solution of the original Navier-Stokes equation when no boundary conditions are considered. Here the proper invariant group was found enabling one to pass from the (x, y)-space into the proper η-interval (see Michael's proofs). Obviously, there remains only the question of the boundary conditions to be satisfied exactly on a single curve, or on two curves or exactly on one curve and in an asymptotic sense on another (usually located in infinity). The coordinate η may contain some constants.

Consider the equation for velocity profile obtained from compressible boundary layer equations by use of von Mises transformation [4] in a two-dimensional steady flow obtained in the space of reduced coordinates (actually only one coordinate, η):

$$U = \frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{2}\, f'(\eta), \tag{4.15}$$

where

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\beta^{n+1} c_n}{(3n+2)!}\, \eta^{3n+2}, \qquad \beta = \text{const.} \tag{4.16}$$

and η is defined by

$$\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}} = \int_0^\eta \frac{\varrho_\infty}{\varrho}\, d\eta, \quad c_1 = \bar{\mu}\varrho. \tag{4.17}$$

Then velocity is given (after evaluation of c_n):

$$U = \frac{1}{2}\left[\beta\eta - \frac{\beta^2}{4!}\, \eta^4 + \frac{11}{7!}\, \beta^3 \eta^7 - \cdots\right]. \tag{4.18}$$

From equation (4.17) one can write

$$d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right) = \frac{\varrho_\infty}{\varrho}\, d\eta,$$

whence

$$\eta = \int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right). \tag{4. 19}$$

Inserting equation (4. 19) into (4. 18), one obtains an expression for U in terms of the space coordinates of the original physical domain:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\beta \int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right) - \frac{\beta^2}{4!}\left[\int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right)\right]^4 + \cdots\right\}. \tag{4. 20}$$

By this operation it is emphasized that one leaves the space of the reduced number of coordinates (i. e., η), and transfers the domain of consideration to the original physical (x, y)-space. The resulting expression for the horizontal velocity U, must satisfy the original system of Navier-Stokes equations in (x, y)-plane. The conditions for this, when an S-boundary curve is considered, were derived in Chapter 3, and they reduce to the inequalities given there. To satisfy those conditions it will be assumed that the series (4. 20) is dominated by an absolutely and uniformly convergent series given by (3. 3. 83). Hence, from comparison one obtains

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\beta \int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right) && \frac{u_1}{U_\infty}\\
&\frac{1}{2}\,\frac{\beta^2}{4!}\left(\int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d(\ldots)\right)^4 && \frac{u_2 - u_1}{U_\infty}\\
&\frac{11}{2}\,\frac{\beta^3}{7!}\left(\int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d(\ldots)\right)^7 && \frac{u_3 - u_2}{U_\infty}\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\\
&\frac{\beta^{n+1} c_n}{(3n+1)!}\left(\int \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\, d(\ldots)\right)^{3n+1} && \frac{u_n - u_{n-1}}{U_\infty}, \quad n > 1.
\end{aligned} \tag{4. 21}$$

In order that the series (4. 20) be convergent each of its terms must be dominated by the corresponding term of series (3. 3. 83), i. e. letting the integral in Equation (4. 19) be denoted by the symbol $I \triangleq I(x, y)$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\,\beta I\right| \leqq \left|\frac{u_1}{U_\infty}\right| \leqq \frac{1}{4}\,\frac{\Omega_0}{U_\infty},\\
&\left|\frac{1}{2}\,\frac{\beta^2}{4!}\,I^4\right| \leqq \left|\frac{u_2 - u_1}{U_\infty}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_0}{U_\infty},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\left|\frac{\beta^{n+1} c_n I^{3n+1}}{(3n+1)!}\right| \leqq \left|\frac{u_n - u_{n-1}}{U_\infty}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0\,(\bar{\alpha}_{45}\,\Omega_0)^{n-2},\\
&\left|\frac{\beta^{n+2} c_{n+1} I^{3n+4}}{(3n+4)!}\right| \leqq \left|\frac{u_{n+1} - u_n}{U_\infty}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0\,(\bar{\alpha}_{45}\,\Omega_0)^{n-1}.
\end{aligned} \tag{4. 22}$$

The above reasoning shows that the expression for the velocity component U, considered as a function in the (x, y)-space is certainly a solution of the original system of Navier-Stokes equations in this space and satisfies the prescribed conditions on a given boundary.

Dividing the last two inequalities one obtains (see Appendix III):

$$\left|\frac{\beta\,\frac{c_{n+1}}{c^n}\,I^3}{(3n+2)\,(3n+3)\,(3n+4)}\right| \leqq \left|\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}\right| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega_0, \tag{4. 23}$$

where $\bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1$.

Next, one requires that

$$\left| \int \frac{\varrho}{\varrho_\infty} d\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1 x}}\right) \right| \leqq \left| \frac{\bar{\alpha}_{45}\Omega_0(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{\beta \frac{c_{n+1}}{c_n}} \right|^{\frac{1}{3}},$$

even with $\left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right| = \left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right|_{\max}$ in the entire domain in consideration. The final inequality

$$(4.24) \quad \frac{1}{2}\left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right|_{\max}\left|\frac{y}{\sqrt{x}}\right|\left|\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1}}\right| \leqq \left| \frac{\bar{\alpha}_{45}\Omega_0(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{\beta \frac{c_{n+1}}{c_n}} \right|^{\frac{1}{3}}$$

is derived from inequality (4. 23) which assures an existence of the function $U(x, y)$, expressed in terms of the ratio $\frac{y}{\sqrt{x}}$, satisfying the fundamental set of equations everywhere in $T + S$, and taking on the prescribed values on S.

In the interval of I, associated with the interval of η in the space of reduced dimensions where the Blasius series is convergent, i. e., $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$ or even $\ll 1$, the left hand side of the inequality (4. 24) takes on larger values depending on the magnitude of the numerator on the right hand side of (4. 24). For $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 0$, one would obtain $\cdots\cdots\cdots \leqq \infty$, which certainly seems to be a desirable result in the present analysis. In the interval of I associated with the interval of η where the Blasius series is a divergent one, very little can be said, except that when $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to \infty$, the result would $\cdots\cdots \leqq 0$, which implies that the existence in the original space would be assured only on the surface of the body ($y = 0$) or for $x \to \infty$. If one considers a finite "n", i. e., $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ very large but finite, the ratio $\frac{y}{\sqrt{x}}$ must be small, i. e., the existence would be assured in the vicinity of the surface of the body, or for sufficiently large x, i. e., far from the leading edge.

As the next step one can consider Weyl's alternating solution. For the sake of simplicity, one may deal directly with the function g, equation (4. 9). Thus repeating the procedure used above, one gets: From

$$U = \frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{2}f'(\eta) = \frac{1}{2}\int f'' d\eta = \frac{1}{2}\int g d\eta,$$

where the function g is Weyl's function, follows:

$$\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{2}|g_{n+1} - g_n| \leqq \frac{1}{2}\frac{(2\eta^3)^n}{(3n)!},$$

or

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq U_\infty \frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!}.$$

One requires that this series be embedded into the existence conditions derived in Chapter 3, hence:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq U_\infty \left|\frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1}.$$

Similarly:

$$|u_n - u_{n-1}| \leqq U_\infty \left|\frac{2^{n-2}\eta^{3n-2}}{(3n-2)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2}.$$

Dividing the last two inequalities furnishes (see Appendix III):

$$\left|\frac{2\eta^3}{N}\right| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1, \quad N = \frac{(3n+1)!}{(3n-2)!},$$

or with $\left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right|$ assumed to be $\left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right|_{\max}$

$$\left|\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right|_{\max} \cdot \left|\frac{y}{\sqrt{x}}\right| \cdot \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu c_1}} \leqq |\{N\bar{\alpha}_{45}\Omega_0\}^{\frac{1}{3}}|,$$

which is the desired result of the analysis, since for $n \to \infty$, the left hand side is $\to +\infty$ regardless of the finite values of $\bar{\alpha}_{45}$ and Ω_0. Thus the existence of the flow in the boundary layer is assured in the entire physical domain of flow.

The question of the two-curve boundary conditions in the original (x, y)-space will now be discussed. An answer to this question is offered by the particular form of the transformation function $\eta = \eta(x, y)$. The reasoning below shows that due to the particular form of this function this problem is solved as one of the aspects of the embedding process of the solution in passing from the space of the reduced number of dimensions to the original space.

The solution in the space of the reduced number of dimensions in form of the alternating series satisfies two-point boundary conditions at $\eta = 0$ and $\eta \to \infty$. During the passage the overall structure of the series remains unchanged; the changes occur in each particular term $\left(\eta \to \frac{y}{\sqrt{x}}\right)$. Let the value of the series refer to one of the boundary points in the space of the reduced number of dimensions, i. e., to $\eta = 0$ or $\eta \to \infty$. One may apply the transformation of coordinates back to the (x, y)-plane such that each term counted as an element in the (x, y)-plane preserves the same value it had when it was counted as an element in the space of the reduced number of dimensions; due to the particular form of the transformation function, this can be easily achieved by assuming $y = 0$ or $y \to \infty$ in $\frac{y}{\sqrt{x}}$, where for convenience x is assumed to be finite and different from zero. From the physical standpoint this restriction is immaterial. The points $x = 0$ or $x \to \infty$ may require special attention. As can be seen, under these assumptions a function in question, counted as an element in the original physical space and the associated function in the space of the reduced number of dimensions, satisfy analogous conditions; further, these are exactly the conditions one wants to satisfy from the physical point of view. Since this is actually accomplished as twopoint conditions transferred from the (η)- to the (x, y)-space, in the (x, y)-space one has to preserve also the "point-wise" character of these conditions. But this point-wise character is actually preserved by the form of the transformation function $\frac{y}{\sqrt{x}}$, i. e. it is always equal to 0 or $\to \infty$ for $y = 0$, or $y \to \infty$, regardless of the (finite) value of x. This discussion seems to point out the important role of the transformation function $\frac{y}{\sqrt{x}}$ chosen intuitively by Prandtl. This is in fact true, since in the algebraic approach (with the use of the theory of the invariant groups) to the problem of the existence of a solution and to the problem of passage from the space of the reduced number of dimensions to the original space or vice versa, mentioned above, it is shown that the validity of such a free passage is fully assured (without any boundary conditions) provided the transformation func-

tions $\left(\text{like } \frac{y}{\sqrt{x}}\right)$ are the members of a particular invariant sub-group of a special transformation group from one space into another. This shows the important character and properties of the transformation function.

The question of the boundary conditions may be discussed more thoroughly. Engineers use to pass freely for long time from the η-line into the (x, y)-plane, $\eta \to \eta(x, y)$, with $u = \frac{1}{2} z'(\eta)$, and one may ask how far justified are their operations. As mentioned above, the transformation of a fundamental solution from η to (x, y) is a rigorous one. Consider a two-dimensional domain, D, bounded by a closed curve, S, extremely large, but finite. In D consider a two-dimensional flow of a compressible fluid; let in D be located a body, B, having between others, one side flat, located at $y = 0$ along the x-axis. Suppose the two-dimensional flow is so orientated that the fluid moves uniformly along the flat wall. Assuming that D is very large in all directions we may assume that the structure of the flow simulates reasonably well for practical purposes the uniform flow along a flat plate (when it moves along the flat wall of B). The first boundary condition, (B. C.), is assumed to be given at $y = 0 (u = 0)$, i. e., along the wall. The second B. C. is assumed to be given for very large values of y, where it may be assumed that the horizontal velocity component, u, is constant (at least from the practical point of view). To such a flow there refers the generalized proof of Lichtenstein, constructed in Chapter 3, i. e., the flow exists. The flow is described mathematically by the system of two equations, given above. Next, the von Mises transformation is applied and the flow in the transformed space is described by an ordinary differential equation on the η-line satisfying two B. C.: one B. C. is satisfied in an exact way: $\eta = 0$, $u = 0$; another B. C. is satisfied in an asymptotic sense: $\eta \to \infty$; $u \to U$ (Weyl's solution). The transformation of coordinates is given by

$$\eta = \int \varrho \varrho_\infty^{-1} d\{\tfrac{1}{2} y [U_\infty (\nu c_1 x)^{-1}]^{\frac{1}{2}}\}.$$

The transformation of a fundamental solution of the ordinary differential equation is achieved in a direct way, $\eta \to \eta(x, y)$ and represents a solution in the (x, y)-plane of the original system of equations. Excluding all the possible singularities, the B. C. $u = 0$ at $\eta = 0$ corresponds directly in a unique way to the B. C. in the (x, y)-plane: $u = 0$ at $y = 0$. The second boundary condition, $u \to U$ for $\eta \to \infty$, means that there exist an $\eta = \eta_1$ (very large), such a quantity $\bar{U}(\bar{\eta})$ and such a number α, $0 < \alpha < 1$, that the following inequality is satisfied:

$$\bar{\eta} > \eta_1; \quad |U - \bar{U}(\bar{\eta})| < \alpha, \quad \text{for } \alpha$$

arbitrarily small. Assume for purely practical purposes that the second B. C. is given by $U = \bar{\bar{U}}(\bar{\eta}) = \text{const.}$ for all $\bar{\eta} > \eta_1$. This B. C. is transformed into the (x, y)-space in the following way: with $\varrho \approx \varrho_\infty$ for large $\bar{\eta}$ (and y), $\eta \cong \frac{1}{2} y [U_\infty (\nu c_1 x)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$, for $x_1 \leqq \bar{x} \leqq x_2$, and $y = \bar{y}$ (very large) = const., there is possible to find values of $\bar{\eta}$, $\bar{\eta} > \eta_1$, such that the equality $\bar{\eta} = \frac{1}{2} \bar{y} [U_\infty (\nu c_1 \bar{x})^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ is satisfied for all $\bar{x}$. For this case $U = \bar{\bar{U}} = \text{constant}$ represents the second B. C., subject to the generalized Lichtenstein proof. Since Lichtenstein's proof is a general one, the particular B. C., proposed here, are acceptable with the fundamental solution in question subject to the same restrictions as those required in Chapter 3, i. e., the boundedness and the domination by a geometric series. From the engineering point of view, it is usually assumed that the B. C. for $\eta(x, y) \to \infty$ $(y \to \infty)$ is satisfied automatically (see the work by Kuerti). The density ϱ will be always finite, and different from infinity (and zero). This will be

accomplished obviously by putting the proper requirements on the function of temperature during the solution procedure of the energy equation. The value of ∞ for the temperature must be excluded, and the value of zero may be excluded by a convention. It will be required that the temperature function is a decent one, (except possibly at some finite number of points) for all finite values of x, $0 \leqq x < \infty$. For the existence proof of the boundary layer, given above, the structure of the function ϱ is immaterial due to the specific properties of the von Mises transformation. For the numerical computations, the function ϱ may be calculated through the temperature function.

One may briefly touch upon the question of the uniqueness of the solution. This question was not discussed either by Lichtenstein or in the present work. The question is difficult and may require a different approach from the one chosen in the present work.

The last point to be discussed is the question of the pressure. As shown in Chapter 3, the pressure is allowed to take on a prescribed value at one point only on the boundary S. Speaking in terms of the theory of the boundary layer, it would imply that one is allowed to prescribe the value of the pressure at one point of the wall or of a solid body, the pressure in all the other points being an automatic result of the entire mathematical analysis and procedure. It is relatively easy to speculate that this item may not decrease the value of the results obtained above. Namely, the philosophy of treating the pressure and of including or excluding the variations and the particular values of pressure in specific points along the boundary, is not clearly outlined in the theory of the boundary layer. This is not so when considering the velocity components and the temperature, and these functions were assumed in Chapter 3 to possess and to take on prescribed values on S. In spite of this the theory of the boundary layer is generally accepted as giving at least some indications with reference to the realistic behavior of the gaseous medium in the boundary layer. Thus Blasius, not intending to complicate the mathematical analysis, simply assumed that the pressure gradient in the x-direction is zero. This is obviously physically an impossible situation since without the external forces and with zero gradient in the x-direction, the flow of a viscous fluid cannot take place against the resistance of the sheering stresses. However, Blasius' solution is generally accepted and gives a fair agreement with tests. The philosophy of zero pressure gradient was and is followed in numerous papers on the theory of the boundary layer both in incompressible and compressible fluid flow domains, with results which show reasonable agreement with tests. Only a limited number of authors in the past treating solutions of the boundary layer equations included pressure variations at the boundary in their analyses. It may be beyond the scope of the present work to attempt to discuss and to analyze the reasons and the implications of this phenomenon, i. e., of the particular effect of the assumptions, concerning the pressure, upon the resulting distribution of the velocity and temperature. It is possible and probable that this question cannot be solved in a purely analytical-mathematical way, but that some experimental data and some physical insight into the entire energetic system of the boundary layer are necessary. In the present approach the pressure is prescribed in one point of the boundary, and in all the other points of S it adjusts itself automatically to finite values which result from the entire system of equations taken into consideration. On the basis of the discussion, given above, it seems that this item should not diminish the value of the results obtained above. In addition to the general discussion, given above, it may be of some value to perform a more detailed consideration showing the applicable possibilities of the obtained results.

As it is well-known, in general, it is not possible to obtain a full agreement in all the details between a rigorous mathematical analysis, like an existence proof, and a

physical description of a phenomenon in the nature. The reason for this is very obvious: both these fundamental sciences are based on different assumptions and work towards different goals. They meet together in applied mathematics or mathematical physics where one tries to unite these two fields. There is only a limited number of cases known where full agreement was obtained between the requirements of mathematics on one side and the physical phenomena on the other. Below, it will be shown that in the present case some agreement can be reached.

First, the incompressible fluid flow will be discussed. In this case the usual mathematical description of the flow involves the equations of motion, continuity and state in a reduced form: $\varrho = \text{const}$. The coefficients of viscosity and heat conductivity are assumed to be constant and the energy equation represents a separate system in the sense that one can solve at first the equations of motion independently of the equation of energy, and next, having the velocity components, one can solve the equation of energy. The system of dynamic equations in this case is not a simultaneous system. Consider a two-dimensional steady flow. By the well-known technique of differentiating the first equation of motion with respect to y and the second with respect to x, one can get rid of the pressure term; introducing the notion of the stream function furnishes one equation in one unknown (stream function), which when solved, enables one to calculate the velocity components. Returning to the original equations of motion, this supplies first order linear partial differential equations for the pressure, p. This would be a particular kind of Cauchy problem, which in the most general case may involve the sought function (pressure in this case) in the following sense:

Let $F(x, y, z, p, g)$ be a function of class A^0 (continuous) in a region U; then it is required to establish the existence of a function $\Phi(x, y)$ with the following properties:

(α) $\Phi(x, y)$ is of class A^1 in a region R;

(β) for all $(x, y) \in R$, $\big(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y)\big) \in U$ and

$$F\big(x, y, \Phi(x, y), \Phi_x(x, y), \Phi_y(x, y)\big) = 0.$$

That is, $z = \Phi(x, y)$ is a solution in R of $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ and for $(x_0, y_0) \in R$, $\Phi(x_0, y_0) = z_0$. That is, $z = \Phi(x, y)$ considered as a surface passes through a curve Γ: $x = x_0$; $y = y_0$, z_0. This problem, stated in such generality, cannot be solved (Perron). By adding hypothesis on Γ and F, and by adding requirements to the solution desired, one obtains certain problems, which have been solved.

Obviously, as a particular problem of the Cauchy type, one can propose a problem in which the curve Γ reduces to a point. This is exactly the case treated in the present work.

The value of the pressure function in practical applications, if it is taken into account (see remarks above), is often given in terms of the value of the velocity outside the boundary layer and its derivative, i. e., $(-p, _z) \approx UU, _z$. The restrictions on pressure would require that the value of $UU, _z$ is given at one point only and that the system of partial differential equations must be solved under that boundary condition plus some additional conditions resulting from the requirements superimposed upon the velocity components. Certainly, this is a practical case and can be treated analytically. The question of the uniqueness would be of interest here, if it would be treated at all. A similar reasoning may be applied to a three-dimensional steady flow.

In the case of a compressible, viscous, heat conducting fluid flow the system of dynamic equations (vector equation of motion or three scalar equations, continuity, energy and equation of state usually in the form of that of a perfect gas) represents a

system of simultaneous equations since the coefficients of viscosity and heat conductivity are functions of the temperature (at least, sometimes also of pressure). The usual approach towards solution of such a system consists of using the equations of motion to determine the velocity components, the energy equation to calculate the temperature distribution, the continuity equation to find the density function and the equation of state to calculate the pressure distribution. It may again be assumed that the boundary conditions for the velocity components and the temperature are satisfied along certain curves, and that concerning the pressure or density they are satisfied in one point only. Thus the differential equation for the density, originated from the continuity equation, will be a first order partial differential equation, associated with a one-point boundary condition (some sort of a Cauchy problem), and the value of the pressure will result automatically from the equation of state. Due to the form of the equation of state a boundary condition can be superimposed either on the density or on pressure, but not on both (usually on the pressure). This reasoning shows that the situation here has again full physical meaning although it may not cover all the practical cases.

5. Summary.

Summarizing, in Chapter 3 a proof of existence was presented for viscous, heat conducting compressible fluid flow in a bounded domain T satisfying certain prescribed values on the boundary S with respect to some dependent functions. Using the known results from the theory of the boundary layer, where the technique of the transformation into the space of the reduced number of dimensions was applied, it was shown in Chapter 4 that the results of the two-point boundary layer theory in the (η)-coordinate space can be embedded into the results of the viscous compressible fluid flow theory of the (x, y)-coordinate space derived in Chapter 3, thus establishing a basis for assurance of the boundary layer flow in the original physical (x, y)-space.

The mathematical theory of a viscous fluid flow is difficult and inaccessible when the tool of the classical theory of functions is used. It is connected with the names of very distinguished mathematicians like Lichtenstein, Odquist, Leray and others. In spite of that it is at the beginning of its development. In the present work a modest attempt was made to generalize some of the results in the past to the compressible fluid flow domain and to include the behavior of the boundary layer in an actual physical case. In the classical approach to the problem of transformations, the usual technique involves direct transforms of the functions and their derivatives by means of the transform functions of coordinates; this requires a non-vanishing Jacobian of the transformation. In the present case, where the Jacobian vanishes, a different technique was used, namely, that of determining convergent series in the original physical space and using them as dominating series for the series transferred from the space of the reduced number of dimensions, thus embedding the latter ones into the existence proof of the viscous compressible flow in the original physical space. This technique with respect to the boundary layer theory seems to be a new one.

Recently Rheinboldt [12] has shown that when a solution of a two-dimensional boundary layer equation in an incompressible fluid flow is analytic with respect to the x-coordinate, then the external boundary conditions are superfluous. This seems to be in agreement with the reasoning presented above.

The proof constructed above is the first proof of this sort of the existence of the flow in the boundary layer of a compressible, viscous and heat-conducting fluid in the original, physical space, satisfying twocurve boundary conditions. When the method of

the transformation of coordinates is used and when the original system of partial differential equations is associated with an ordinary differential system, whose solution is represented by means of convergent limiting processes (series), the proof constructed above, assures rigorously the existence of the boundary layer flow in the entire original physical domain in question subject only to restrictions on the magnitude of the functions describing the physical behaviour of the fluid. It may be a very attractive task in the future to attempt to weaken the restrictive conditions mentioned above, in the sense that the larger magnitudes of the functions in question could be admitted.

A few final remarks may be given referring to the uniqueness problem. The lack of the proof of the uniqueness in the present case throws an interesting light upon the behaviour of solutions of the boundary layer equations as interpreted from the physical standpoint. As it is well known, in many systems of partial differential equations the forms of the boundary conditions which may assure a unique solution are unknown. This is exactly the situation in the present problem. There are many known solutions of the boundary layer equations obtained by different methods. All these solutions may be correct from the mathematical point of view, although they do not coincide. The experimental curve representing the actual flow pattern in the boundary layer may be different from all the analytical solutions; of course, it may be obtainable by means of the analytical methods, but the forms of the boundary conditions which will definitely assure this unique solution may be, and actually are, unknown, as yet.

A reader, interested in the problem of the transfer of solutions on the η-line back into the (x, y)-plane, is referred to the special literature on the question. The problem is an old one, but a mathematical approach to it was originated by a short note of Garrett Birkhoff in 1949. The actual proof that a solution of an ordinary differential equation on the η-line is a solution of the corresponding partial differential equation in the (x, y)-space and the formulation of the restrictive conditions under which the proof is valid, were constructed by the late Professor Michael, applying some operations in a Banach space and the fundamental properties of the invariant groups. The proof is of a fully algebraic character. Some particular cases were solved by Morgan; a general method for practical purposes was proposed by v. Krzywoblocki and Roth (to be published).

Appendix I.

Consider a special case of the first boundary value problem as stated in section 1. 4. Consider

$$\nabla^2 U = 0, \tag{A-1}$$

where U satisfies the prescribed values $U(\sigma')$ on the boundary S. The solution is given by Green's formula

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(x, y, z; \sigma')\, U(\sigma')\, d\sigma'. \tag{A-2}$$

Consider now the second integral in equation (3. 2. 1. 22). It follows immediately that

$$2 \int_S \frac{\partial^2 G(\tau, \sigma')}{\partial x \partial n'} (\varrho u)'\, d\sigma' = 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{\partial G}{\partial n'} (\varrho u)'\, d\sigma', \quad G = G(\tau, \sigma'),$$

and when comparing with equation (A-2) one obtains

$$2 \int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n'} (\varrho u)'\, d\sigma' = 8\pi \frac{\partial (\varrho u)}{\partial x}.$$

Appendix II.

The fundamental solution of Laplace elliptic differential equation in three or more dimensions, $\triangle u = 0$, is:

$$u = \frac{1}{\varrho^{n-2}}, \qquad n \geqq 3. \tag{B-1}$$

This is the potential generated by a unit mass situated at the origin. If we have a continuous distribution of mass $m(\xi, \eta, \zeta)$ over a region D and $r(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ is the distance from the point (ξ, η, ζ) to the point (x, y, z), the corresponding potential is:

$$u(x, y, z) = \iiint_D \frac{m(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi d\eta d\zeta, \tag{B-2}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}. \tag{B-3}$$

These potentials are all harmonic functions outside the boundary of the domain in question.

Theorem I: *If $m(\xi, \eta, \zeta)$ is bounded and continuous in D, the potential function* (B-2) *is continuous and bounded in the whole of the domain D and has continuous and bounded derivatives u_x, u_y, u_z, which can be found by a formal differentiation under the integral sign:*

$$u_x(x, y, z) = \iiint_D m\left(\frac{1}{r}\right)_x d\xi d\eta d\zeta \tag{B-4}$$

$$= -\iiint_D m\left(\frac{1}{r}\right)_\xi d\xi d\eta d\zeta = -\iiint_D m \frac{x-\xi}{r^3}\, d\xi d\eta d\zeta.$$

If m has continuous bounded first derivatives, the second derivatives u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, exist and are continuous bounded in D. They are given by a formal differentiation of Equation (B-4).

To prove the second part of Theorem I we write the expression for u_x in the form:

$$u_x = \iiint_D m_\xi \frac{1}{r}\, d\xi d\eta d\zeta - \iiint_D \left(\frac{m}{r}\right)_\xi d\xi d\eta d\zeta, \tag{B-5}$$

or

$$u_x = \iiint_D m_\xi \frac{1}{r}\, d\xi d\eta d\zeta + \iint_S \frac{m}{r} \cos(n, \xi)\, dS, \tag{B-6}$$

with

$$\iiint_D \frac{\partial A}{\partial x}\, dx dy dz = -\iint_S A \cos(n, x)\, dS, \tag{B-7}$$

with n denoting the direction of the inner normal at any point of S. The surface integral in (B-6) is regular at any $P \in D$, and the first integral is of the same type as the integral (B-2); hence u_x is continuous and bounded in the whole domain D and has continuous (bounded) derivatives u_{xx}, etc.

Consider the equation:

$$\triangle u(x, y, z) = F(x, y, z) \text{ in } D;\ u = 0 \text{ on } S. \tag{B-9}$$

The solution of this boundary value problem is given by:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\iiint_D F(\xi, \eta, \zeta)\, G(\xi, \eta, \zeta;\ x, y, z)\, d\xi d\eta d\zeta, \tag{B-10}$$

where the Green function G is of the form:

$$G(\xi, \eta, \zeta;\ x, y, z) = \frac{1}{r} - w(\xi, \eta, \zeta;\ x, y, z), \tag{B-11}$$

with $\triangle w = 0$ in D, $w = \frac{1}{r}$ on S. We construct the first derivative using Equation (B-6):

$$u_x = -\frac{1}{4\pi}\left\{\iiint_D F_\xi \frac{1}{r}\, d\xi d\eta d\zeta + \iint_S F \frac{1}{r} \cos(n, \xi)\, dS\right\} - \frac{1}{4\pi}\iiint_D F w_\xi d\xi d\eta d\zeta, \quad \text{with } \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{B-12}$$

or

$$\begin{aligned} u_x = &-\frac{1}{4\pi}\iiint_D F_\xi \frac{1}{r}\cdots - \frac{1}{4\pi}\iint_S F\frac{1}{r}\cos(n, \xi)\, dS \\ &-\frac{1}{4\pi}\iiint_D (Fw)_\xi \cdots + \frac{1}{4\pi}\iiint_D F_\xi w \cdots \\ = &-\frac{1}{4\pi}\iiint_D F_\xi \frac{1}{r}\cdots - \frac{1}{4\pi}\iint_S F\frac{1}{r}\cos(n, \xi)\, dS \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_S F\frac{1}{r}\cos(n, \xi)\, dS + \frac{1}{4\pi}\iiint_D F_\xi w \cdots, \end{aligned} \tag{B-13}$$

since $w = \frac{1}{r}$ on S. The result is:

$$u_x = -\frac{1}{4\pi}\iiint_D F_\xi G d\xi d\eta d\zeta. \tag{B-14}$$

The properties of the first and second derivatives of the Green function are discussed in [6], 393.

Appendix III.

This Appendix contains the discussion of the operations on the inequalities in Chapter 4. Inequality (4. 23):

$$\left|\frac{\beta^{n+2} c_{n+1} I^{3n+4}}{(3n+4)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1}; \tag{C-1}$$

$$\left|\frac{\beta^{n+1} c_n I^{3n+1}}{(3n+1)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2}. \tag{C-2}$$

The division furnishes:

$$\left|\frac{\beta c_{n+1} c_n^{-1} I^3}{M}\right| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1, \tag{C-3}$$

where

$$M = \frac{(3n+4)!}{(3n+1)!}.$$

To prove this, we put down:

$$\text{(C-4)}\quad \left|\frac{\beta^{n+1}c_n I^{3n+1}}{(3n+1)!}\right| = \left|\frac{\beta^{n+2}c_{n+1}I^{3n+4}M}{(3n+4)!\,\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}\right| = \left|\frac{\beta^{n+2}c_{n+1}I^{3n+4}}{(3n+4)!}\right|\cdot\left|\frac{M}{\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}\right| \leqq \left|\frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1}\right|\left|\frac{M}{\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}\right| = \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2}(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)\left|\frac{M}{\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}\right|;$$

comparing (C-2) and (C-4) we see that:

$$\text{(C-5)}\qquad (\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)\left|\frac{M}{\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}\right| \geqq 1,$$

or

$$\text{(C-6)}\qquad \left|\frac{\beta I^3\frac{c_{n+1}}{c_n}}{M}\right| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1, \quad \text{for } n\to\infty,\ \eta \text{ fixed},$$

q. e. d., where the inequality (3. 3. 81b) was used.

Inequality obtained from Weyl's solution:

$$\text{(C-7)}\qquad U_\infty\left|\frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1};$$

$$\text{(C-8)}\qquad U_\infty\left|\frac{2^{n-2}\eta^{3n-2}}{(3n-2)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2};$$

dividing:

$$\text{(C-9)}\qquad \frac{2\eta^3}{N} \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1,$$

where

$$N = \frac{(3n+1)!}{(3n-2)!}.$$

Proof:

$$\text{(C-10)}\quad U_\infty\left|\frac{2^{n-2}\eta^{3n-2}}{(3n-2)!}\right| = U_\infty\left|\frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!}\frac{N}{2\eta^3}\right| = U_\infty\left|\frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{N}{2\eta^3}\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1}\left|\frac{N}{2\eta^3}\right| = \frac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2}(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)\left|\frac{N}{2\eta^3}\right|;$$

comparing (C-8) and (C-10):

$$\text{(C-11)}\qquad (\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)\left|\frac{N}{2\eta^3}\right| \geqq 1,$$

$$\text{(C-12)}\qquad \left|\frac{2\eta^3}{N}\right| \leqq (\bar{\alpha}_{45}\Omega_0), \quad \text{for } n\to\infty,\ \eta \text{ fixed},$$

q. e. d. Higher order term:

$$U_\infty \left| \frac{2^n \eta^{3n+4}}{(3n+4)!} \right| \leqq \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^n; \tag{C-13}$$

$$U_\infty \left| \frac{2^{n-1} \eta^{3n+1}}{(3n+1)!} \right| \leqq \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-1}; \tag{C-14}$$

we put down:

$$U_\infty \left| \frac{2^{n-1} \eta^{3n+1}}{(3n+1)!} \right| = U_\infty \left| \frac{2^n \eta^{3n+4}}{(3n+4)!} \right| \cdot \left| \frac{P}{2\eta^3} \right| \leqq \frac{1}{2} \Omega_0 (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^n \left| \frac{P}{2\eta^3} \right| = \frac{1}{2} \Omega_0 (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-1} (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0) \left| \frac{P}{2\eta^3} \right|, \tag{C-15}$$

where

$$P = \frac{(3n+4)!}{(3n+1)!};$$

comparing (C-14) and (C-15):

$$(\bar{\alpha}_{45} \Omega_0) \cdot \left| \frac{P}{2\eta^3} \right| \geqq 1; \qquad \left| \frac{2\eta^3}{P} \right| \leqq (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0), \text{ for } n \to \infty, \ \eta \text{ fixed}, \tag{C-16}$$

q. e. d.

We may point out the characteristic features of this procedure. Namely, we start from (C-8) and we represent this inequality in term of (C-7). Since $(\bar{\alpha}_{45} \Omega_0) < 1$, we have $(\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-1} < (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-2}$ for n sufficiently large. This means that in this case we apply some sort of "tightening" process for the sequence $|u_n - u_{n-1}|$. One may ask whether we can proceed in the opposite direction, i. e.:

$$U_\infty \left| \frac{2^{n-1} \eta^{3n+1}}{(3n+1)!} \right| = U_\infty \left| \frac{2^{n-2} \eta^{3n-2}}{(3n-2)!} \right| \cdot \left| \frac{2\eta^3}{N} \right| \leqq \frac{1}{2} \Omega_0 (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-2} \left| \frac{2\eta^3}{N} \right|. \tag{C-17}$$

Comparing (C-14) and (C-17) and using

$$(\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-2} > (\bar{\alpha}_{45} \Omega_0)^{n-1}, \tag{C-18}$$

we see that we can assume

$$\left| \frac{2\eta^3}{N} \right| = 1, \quad \text{or even} \quad \left| \frac{2\eta^3}{N} \right| < 1, \tag{C-19}$$

but it is impossible to find how much $\left| \frac{2\eta^3}{N} \right|$ should be less than 1. This seems to imply that the second procedure of a "loosening" nature is not so strong enough as the first procedure.

But the simplest and the strongest proof of the validity of the operations on the inequalities below (4. 23) is the following one:

Two series of the form $u = u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (u_k - u_{k-1})$ are considered; in the (x, y)-plane the series is dominated by a geometric series of the ratio $(\bar{\alpha}_{45} \Omega_0) \leqq 1$, and the other series satisfies the condition:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq U_\infty \frac{2^{n-1} \eta^{3n+1}}{(3n+1)!}, \quad \text{(Weyl)}.$$

We require

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} a_{n+1}\colon U_\infty \left| \frac{2^{n-1}\eta^{3n+1}}{(3n+1)!} \right| &\leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-1}; \\ a_n\colon U_\infty \left| \frac{2^{n-2}\eta^{3n-2}}{(3n-2)!} \right| &\leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{n-2}. \end{aligned}$$

The proof of Weyl refers to a finite interval $0 \leqq \eta < +\infty$ (*H. Weyl*, On the differential equations of the simplest boundary layer problems, Annals of Mathematics, **42** (1943), p. 386, top), with the boundary conditions satisfied exactly at $\eta = 0$, i. e., $f(0) = f'(0) = 0$; $f''(0) = 1$; the boundary conditions at $\eta \to +\infty$ exhibit an asymptotic behavior, i. e., f' tends to a positive limit β with $\eta \to \infty$ (Ibid, p. 386, top; p. 388 top).

Conditions (I) are always satisfied; for any η, however large, independent of n, there is always $n = n_\eta$, such that for $n > n_\eta$, the inequalities (I) hold. The limits of both a_{n+1} and $a_n \to 0$ for $n \to \infty$ for any finite value of η, however large.

The power series (I) in η represents an entire function; the limit of the ratio of the coefficients, b_n, of this series

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{27n^3 - 3n} \right| = 0, \quad \text{for } n \to \infty;$$

the radius of convergence, R, given by

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|} \to \infty,$$

i. e., the function in question is the entire one. The inequality

$$(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0) \left| \frac{27n^3 - 3n}{2\eta^3} \right| \geqq 1, \quad \text{or} \quad \left| \frac{2\eta^3}{27n^3 - 3n} \right| \leqq (\bar{\alpha}_{45}\Omega_0),$$

can be always satisfied, since $0 \leqq \eta < +\infty$, $n \to +\infty$, and

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 0.$$

The proof, given above, refers to the velocity u. A similar procedure can be proposed for the velocity component $v = -\psi_x$, with one addition, namely that analysis refers to a fixed value of x, i. e., x is some sort of a parameter, which is admissible. One gets:

$$v = U_\infty x^{-\frac{1}{2}}(\eta f' - f),$$

and

$$v_{n+1} - v_n = U_\infty x^{-\frac{1}{2}}[\eta(f'_{n+1} - f'_n) - (f_{n+1} - f_n)],$$

which differentiated with respect to η furnishes:

$$v'_{n+1} - v'_n = U_\infty x^{-\frac{1}{2}}\eta(f''_{n+1} - f''_n) = x^{-\frac{1}{2}}\eta(g_{n+1} - g_n)\,U_\infty,$$

and

$$|v'_{n+1} - v'_n| \leqq U_\infty x^{-\frac{1}{2}}\eta\,\frac{(2\eta^3)^n}{(3n)!},$$

$$|v'_{n+1} - v'_n| \leqq U_\infty x^{-\frac{1}{2}}2^n\,\frac{(3n+1)}{(3n+1)!}\,\eta^{3n+1}.$$

Obviously, the reasoning can be repeated. The boundary condition at $\eta = 0$ is satisfied exactly, but the satisfaction of the boundary condition at $\eta \to \infty$ requires a further consideration.

Above, it is assumed that exactly the same form of Navier-Stokes equation is used in the (x, y)-space and reduced next in the (η)-space. Regarding the problem of the flow along a body, like a flat plate, this is perfectly admissible, since the proof of Lichtenstein (as well as the present) refers to the following conditions: an incompressible (compressible in the present work) fluid is contained in a finite (however large) domain; some bodies may be completely immerged in the fluid. The boundary of the domain and the surfaces and the immerged bodies may consist of closed, analytic and regular surfaces.

The proof of Lichtenstein and the present one refer to a closed domain, whereas the proof of Weyl refers to an open interval $0 \leqq \eta < \infty$. The requirement that the flow should be embedded into the physical plane is very strong since it is equivalent to an embedding the flow into a finite domain, however large, which is perfectly admissible from the practical point of view. Of course, it would be very desirable to extend the proof in the physical space (x, y, z) into an open domain, but in this case the concept of the Green's function cannot be used.

Bibliography to Chapter 4.

[1] *L. E. Dickson*, Differential Equations from the Group Standpoint. Reprinted from the Annals of Mathematics, Second Series, **25** (1924), 287—378.

[2] *L. P. Eisenhart*, Continuous Groups of Transformations. Princeton 1933.

[3] *D. W. Hall* and *G. L. Spencer*, Elementary Topology. New York 1955.

[4] *M. Z. v. Krzywoblocki*, On the Generalized Theory of the Laminar, Two-Dimensional Boundary Layer along a Flat Plate in Continuum and Slip Flow Regimes, Part II. On the fundamental existence theorems for partial differential systems of the first order. Bulletin de la Société Mathemat. de Grèce, **24** 1, 2, 3 (1954), 43—73.

[5] *A. D. Michal*, Differential Invariants and Invariant Partial Differential Equations in Normed Linear Spaces. Proceedings of the National Academy of Sciences, **37** (1952), 623—627.

[6] *A. D. Michal*, General Differential Geometries and Related Topics. Bulletin of the American Mathematical Society, **45** (1939), 529—563.

[7] *A. J. A. Morgan*, The Reduction by of One the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, Second Series, **3** (1952), 250—259.

Eingegangen 7. Januar 1960.

Topologische Untergruppenräume.

Von *Gilbert Helmberg* in Mainz.

1.

Die Tatsache der Existenz des Mittelwertes einer (komplexwertigen) fastperiodischen Funktion auf einer Gruppe bringt die Frage nach Verfahren zu seiner Berechnung mit sich. Direkte Methoden, die es erlauben, den Mittelwert der betrachteten Funktion — von trivialen Fällen abgesehen — als Grenzwert zu berechnen, sind, soweit bekannt, von Fall zu Fall verschieden und abhängig von der zugrunde liegenden Gruppe und der betrachteten Menge fastperiodischer Funktionen.

Beispiele allgemeinerer Verfahrensprinzipien wären etwa die Zurückführung der Mittelwertbildung über die ganze Gruppe auf wiederholte Mittelwertbildung über Untergruppen oder die Heranziehung der Theorien der Gleichverteilung, wobei der gesuchte Mittelwert wieder auf einfachere Mittelwerte zurückgeführt wird. Ein weiteres allgemeineres Verfahrensprinzip würde darin bestehen, mit Rücksicht auf den Grenzwertcharakter des Mittelwertes gewissermaßen von vornherein auf seine explizite Berechnung zu verzichten und nur danach zu fragen, wie er durch Mittelwertbildung über einfachere Gruppen, beispielsweise endliche Untergruppen, approximiert werden kann. In einer verschwommenen Formulierung, die jedoch auf die exakte Fassung hinzielt, würde das Problem lauten: Kann eine gegebene Gruppe mit Bezug auf eine gegebene Menge fastperiodischer Funktionen durch Untergruppen in dem Sinne approximiert werden, daß die über die Untergruppen erstreckten Mittelwerte die über die ganze Gruppe erstreckten Mittelwerte approximieren? Genauer gesagt, stellt sich somit die Frage, ob es möglich ist, in der Menge der Untergruppen eine Topologie derart einzuführen, daß Konvergenz von Untergruppen gegen eine bestimmte Untergruppe für jede fastperiodische Funktion einer gegebenen Menge äquivalent ist mit der Konvergenz der über die einzelnen Untergruppen erstreckten Mittelwerte gegen den über diese Grenz-Untergruppe erstreckten Mittelwert.

Diese Frage läßt sich sofort positiv beantworten, wenn es sich um einen Banachraum fastperiodischer Funktionen handelt und wenn gezeigt ist, daß den betrachteten Mittelwerten lineare Funktionale aus dem dazu konjugierten Banachraum entsprechen, die den zugehörigen Untergruppen oder gewissen Klassen von Untergruppen eineindeutig zugeordnet sind. Dann ist es nur mehr nötig, die schwache Topologie dieses Raumes, auf eine entsprechende Untermenge relativiert, auf die zugeordnete Menge von Untergruppen(klassen) zu übertragen. Das Bestreben wird aber gerade dahin gehen, diese Topologie ohne Bezug auf diese Objekte zu definieren, d. h. im Falle der stetigen Funktionen auf einer kompakten Hausdorffschen Gruppe (bei denen der Mittelwert mit dem Haar-Integral identisch ist) nur unter Zuhilfenahme der topologischen Struktur der Gruppe,

im Falle einer abstrakten Gruppe nur unter Zuhilfenahme unmittelbarer Eigenschaften der betrachteten Menge fastperiodischer Funktionen.

Bei einer Untersuchung der beiden anderen angedeuteten Verfahrensprinzipien ist der Verfasser in [3] zum Teil auch auf diese Frage eingegangen. Es handelte sich dabei um die Halbgruppe der abgeschlossenen Normalteiler einer kompakten Hausdorffschen Gruppe, die in der in Rede stehenden Topologie zu einer kompakten Hausdorffschen Halbgruppe wurde. Die Topologie wurde dabei bestimmt durch Angabe eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums für die Konvergenz eines Netzes von abgeschlossenen Normalteilern.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Untersuchungen in dreifacher Hinsicht zu ergänzen: zunächst zeigt im Falle der stetigen Funktionen auf einer kompakten Hausdorffschen Gruppe eine Inspektion des zu dem eben erwähnten Kriterium führenden Beweisganges, daß eine Beschränkung auf Normalteiler unnötig ist. In Abschnitt 2 werden daher die entsprechenden Hilfssätze und das aus ihnen abgeleitete Kriterium für den kompakten und Hausdorffschen Raum aller abgeschlossenen Untergruppen der gegebenen kompakten Hausdorffschen Gruppe formuliert. In Abschnitt 3 wird die gleiche Topologie durch Angabe eines vollständigen Umgebungssystems definiert und in Abschnitt 4 an Hand einiger Beispiele von kompakten Hausdorffschen Gruppen illustriert. Schließlich ergibt sich durch Heranziehung der Kompaktifizierung einer beliebigen abstrakten Gruppe mit Hilfe eines gegebenen vollen Moduls fastperiodischer Funktionen die Möglichkeit, die gewünschte Topologie durch Angabe eines vollständigen Umgebungssystems auch in der Menge aller Untergruppen einer abstrakten Gruppe einzuführen (Abschnitt 5). Dabei wird der entstehende topologische Raum durch Identifizierung der Untergruppen jeweils einer Kongruenzklasse erhalten und im allgemeinen nicht mehr kompakt sein.

Die in den Abschnitten 2 bis 4 verwendeten Querstriche über den verschiedenen Symbolen sollen kennzeichnen, daß es sich um eine kompakte Hausdorffsche Gruppe und ihre abgeschlossenen Untergruppen handelt, und zur Unterscheidung dieses Falles vom Fall einer abstrakten Gruppe sowie an den Stellen, an denen beide Fälle miteinander in Beziehung gebracht werden, zur Herstellung der entsprechenden Querverbindungen dienen.

2.

Es sei $\overline{X}$ eine kompakte Hausdorffsche Gruppe und $\overline{\mathfrak{X}} = \{\overline{X}_\varrho : \varrho \in R\}$ die Menge der abgeschlossenen Untergruppen von $\overline{X}$ sowie $\mathfrak{C}(\overline{X})$ der Banachraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\overline{X}$ und $\mathfrak{V}$ der Raum aller Verteilungsmaße auf $\overline{X}$ in der schwachen Topologie. Unter einem Verteilungsmaß auf $\overline{X}$ soll im folgenden immer ein nicht negatives, normiertes, abzählbar additives Borelsches Maß auf $\overline{X}$ verstanden werden. Jedem Verteilungsmaß $\nu \in \mathfrak{V}$ ist eineindeutig ein monotones, normiertes und daher beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{C}(\overline{X})$ zugeordnet, das wir wieder mit ν bezeichnen. Es gilt dabei

$$\nu(f) = \int_{\overline{X}} f(x)\, d\nu(x) \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{C}(\overline{X}).$$

Eine Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Maßes ν_0 in der schwachen Topologie ist gegeben durch eine endliche Menge von Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{C}(\overline{X})$ und eine positive reelle Zahl ε, und zwar gilt

$$\mathfrak{U} = \{\nu \in \mathfrak{V}: \mid \nu(f_i) - \nu_0(f_i) \mid < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Der Raum $\mathfrak{V}$ ist in dieser Topologie kompakt und Hausdorffsch.

Bekanntlich sind die abgeschlossenen Untergruppen $\overline{X}_\varrho$ von $\overline{X}$ den (bezüglich des Faltungsproduktes) idempotenten Verteilungsmaßen μ_ϱ auf $\overline{X}$ eineindeutig zugeordnet, wobei μ'_ϱ das normierte Haarsche Maß auf $\overline{X}_\varrho$ bedeutet und μ_ϱ für jede Borelmenge B von $\overline{X}$ durch

$$\mu_\varrho(B) = \mu'_\varrho(B \cap \overline{X}_\varrho)$$

erklärt ist (s. [7], 3.). Da die Menge der idempotenten Verteilungsmaße auf $\overline{X}$ durch die Bedingung $\mu_\varrho * \mu_\varrho = \mu_\varrho$ charakterisiert ist, bildet sie eine in der schwachen Topologie abgeschlossene Untermenge von $\mathfrak{V}$. Überträgt man die relativierte Topologie in dieser Untermenge auf die Menge $\overline{\mathfrak{X}}$, so wird diese zu einem kompakten Hausdorffschen Raum. In dieser Topologie bedeutet also Konvergenz eines Netzes von Untergruppen $\overline{X}_\varrho$ gegen eine bestimmte Untergruppe $\overline{X}_0$ die Konvergenz des Netzes der zugehörigen Verteilungsmaße μ_ϱ gegen das Verteilungsmaß μ_0, oder, äquivalenterweise, für jede stetige komplexwertige Funktion auf $\overline{X}$ die Konvergenz des Haar-Integrales der auf $\overline{X}_\varrho$ beschränkten Funktion über $\overline{X}_\varrho$ gegen das Haar-Integral der auf $\overline{X}_0$ beschränkten Funktion über $\overline{X}_0$.

Unter einem Netz $\mathfrak{N} = \{\Phi_\tau : \tau \in T\}$ verstehen wir dabei eine indizierte Menge, bei der die Indexmenge T aufwärts gerichtet ist; d. h. in T ist eine Teilordnung $<$ definiert, in der zu je zwei Indizes $\tau_1, \tau_2 \in T$ mindestens ein Index $\tau_3 \in T$ existiert, für den $\tau_1 < \tau_3$ und $\tau_2 < \tau_3$ gilt. (Wir verwenden hier und im folgenden die Terminologie von Kelley [4].) Das Netz $\mathfrak{N}$ liegt in einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn $\Phi_\tau \in \mathfrak{M}$ für alle $\tau \in T$ gilt. Das Netz $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ liegt häufig in einer Untermenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$, wenn für jeden Index $\bar{\tau} \in T$ ein Index $\tau \in T$ existiert, für den $\bar{\tau} < \tau$ und $\Phi_\tau \in \mathfrak{U}$ gilt. Das Netz $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ liegt schließlich in einer Untermenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$, wenn $\Phi_\tau \in \mathfrak{U}$ für alle Indizes $\tau \in T$ gilt, die größer als ein bestimmter, von $\mathfrak{U}$ abhängiger Index $\tau(\mathfrak{U}) \in T$ sind.

Ein Netz $\mathfrak{N} = \{\nu_\tau : \tau \in T\}$ in $\mathfrak{V}$ konvergiert gegen ein Verteilungsmaß ν_0, wenn es schließlich in jeder Umgebung von ν_0 liegt. Wir bezeichnen dann ν_0 als Konvergenzpunkt des Netzes $\mathfrak{N}$ und schreiben $\nu_0 = \lim_{\mathfrak{N}} \nu_\tau$. Ein Verteilungsmaß ν_0 heißt ein Häufungspunkt des Netzes $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{N}$ häufig in jeder Umgebung von ν_0 liegt. Eine Topologie in einer Menge $\mathfrak{M}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man weiß, welche Netze in $\mathfrak{M}$ konvergieren und die Konvergenzpunkte dieser Netze kennt, da eine Untermenge $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{M}$ dann und nur dann abgeschlossen ist, wenn sie die Konvergenzpunkte aller konvergenten Netze in $\mathfrak{W}$ enthält.

Ein Netz $\mathfrak{N}' = \{\Psi_\sigma : \sigma \in S\}$ heißt ein Unternetz des Netzes $\mathfrak{N} = \{\Phi_\tau : \tau \in T\}$, wenn es eine Abbildung t von S in T mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\Psi_\sigma = \Phi_{t(\sigma)}$ für alle $\sigma \in S$;

2. für jeden Index $\bar{\tau} \in T$ existiert ein Index $\bar{\sigma} \in S$ derart, daß $\bar{\tau} < t(\sigma)$ für alle Indizes $\sigma \in S$ gilt, die $\bar{\sigma} < \sigma$ erfüllen.

Die von der Menge $\{\mu_\varrho : \varrho \in R\}$ auf die ihr elementweise eineindeutig zugeordnete Menge $\overline{\mathfrak{X}}$ übertragene Topologie bezeichnen wir als die schwache Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$. Um sie ohne Rückgriff auf $\mathfrak{V}$ festzulegen, verwenden wir wie in [3] die folgenden Definitionen (die leere Menge sei mit 0 bezeichnet):

Das Gruppenelement x_0 heiße eine Häufungsstelle des Netzes $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$, wenn für jeden Index $\bar{\sigma} \in S$ und jede Umgebung U von x_0 ein Index $\sigma \in S$ existiert, für den $U \cap \overline{X}_\sigma \neq 0$ und $\bar{\sigma} < \sigma$ gilt. Die Menge aller Häufungsstellen des Netzes $\mathfrak{N}$ heiße $H_\mathfrak{N}$.

Das Gruppenelement x_0 heiße eine Konvergenzstelle des Netzes $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$, wenn für jede Umgebung U von x_0 ein Index $\sigma(U) \in S$ mit der Eigenschaft existiert, daß $U \cap \overline{X} \neq 0$ für alle $\sigma \in S$ gilt, die $\sigma(U) < \sigma$ erfüllen. Die Menge aller Konvergenzstellen eines Netzes $\mathfrak{N}$ heiße $K_{\mathfrak{N}}$.

Die folgenden Sätze geben Aufschluß über das Konvergenzverhalten eines Netzes $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{X}}$. Die Beweise verlaufen wörtlich wie die der entsprechenden Sätze in [3] § 5, wenn man stets „Normalteiler" durch „Untergruppe", „N_σ" durch „$\overline{X}_\sigma$" und „$\mathfrak{H}$" durch „$\overline{\mathfrak{X}}$" ersetzt.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{N}' = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ ein Unternetz des Netzes $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\tau : \tau \in T\}$ in $\overline{\mathfrak{X}}$. Dann gilt $K_{\mathfrak{N}} < K_{\mathfrak{N}'} < H_{\mathfrak{N}'} < H_{\mathfrak{N}}$.*

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ ein konvergentes Netz in $\overline{\mathfrak{X}}$. Dann gilt $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}} \in \overline{\mathfrak{X}}$ und $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}} = \lim\limits_{\mathfrak{N}} \overline{X}_\sigma$.*

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ ein Netz in $\overline{\mathfrak{X}}$ und $\{\overline{X}_\tau : \tau \in T\}$ die Menge aller Häufungspunkte von $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{X}}$. Dann gilt $K_{\mathfrak{N}} = \bigcap\limits_{\tau \in T} \overline{X}_\tau$ und $H_{\mathfrak{N}} = \bigcup\limits_{\tau \in T} \overline{X}_\tau$.*

Satz 1. *Das Netz $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ in $\overline{\mathfrak{X}}$ konvergiert dann und nur dann, wenn $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}}$ gilt. Ist dies der Fall, dann gilt $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}} \in \overline{\mathfrak{X}}$ und $K_{\mathfrak{N}} = H_{\mathfrak{N}} = \lim\limits_{\mathfrak{N}} \overline{X}_\sigma$.*

3.

Das in Abschnitt 2 angewendete Verfahren zur Bestimmung der schwachen Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$ hat den Nachteil, daß es keine anschauliche Vorstellung von den in dieser Topologie offenen Untermengen von $\overline{\mathfrak{X}}$ vermittelt. Um besseren Überblick über diese zu erlangen, bestimmen wir ein vollständiges Umgebungssystem in $\overline{\mathfrak{X}}$.

Für eine beliebig gegebene Untergruppe $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$, eine beliebige offene Umgebung V der Einheit in X und eine endliche Menge von Elenemten $x_1, \ldots, x_n \in \overline{X}_0$ definieren wir die Untermenge $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ von $\overline{\mathfrak{X}}$ durch

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V) = \{\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{X}} : \overline{X}_\varrho \cap V x_i \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n),\ \overline{X}_\varrho < V\overline{X}_0\}.$$

Satz 2. *Die Familie $\overline{\mathfrak{U}}$ aller Untermengen $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_\varrho; x_{\varrho 1}, \ldots, x_{\varrho n}; V)$ von $\overline{\mathfrak{X}}(\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{X}}$, $x_{\varrho i} \in \overline{X}_\varrho$ für $i = 1, \ldots, n$, V eine offene Umgebung der Einheit in $\overline{X}$) ist ein vollständiges Umgebungssystem für die schwache Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$.*

Wir führen den Beweis über eine Reihe von Hilfssätzen. Sofern nichts anderes ausdrücklich festgestellt ist, beziehen sich alle topologischen Aussagen über Untermengen von $\overline{\mathfrak{X}}$ auf die schwache Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$.

Hilfssatz 4. *Es sei $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$ gegeben und V eine offene Umgebung der Einheit in $\overline{X}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{U}}_0 = \{\overline{X}_\varrho : \overline{X}_\varrho < V\overline{X}_0\}$ offen in $\overline{\mathfrak{X}}$.*

Beweis. Mengentheoretische Subtraktion werde durch das Symbol $\setminus$ bezeichnet. Wir haben zu beweisen, daß $\overline{\mathfrak{X}} \setminus \overline{\mathfrak{U}}_0$ abgeschlossen ist, d. h. daß ein Netz in $\overline{\mathfrak{X}} \setminus \overline{\mathfrak{U}}_0$ keinen Häufungspunkt in $\overline{\mathfrak{U}}_0$ haben kann.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gäbe ein (konvergentes) Netz $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ in $\overline{\mathfrak{X}} \setminus \overline{\mathfrak{U}}_0$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{\mathfrak{N}} \overline{X}_\sigma = \overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}_0. \tag{1}$$

Die Untermenge $Y = \overline{X} \setminus V\overline{X}_0$ von $\overline{X}$ ist abgeschlossen in $\overline{X}$, also wieder kompakt. Wegen $\overline{X}_\sigma \notin \overline{\mathfrak{U}}_0$ gilt $\overline{X}_\sigma \cap Y \neq 0$ für alle $\sigma \in S$. Wir wählen für jeden Index $\sigma \in S$ ein Element $x_\sigma \in \overline{X}_\sigma \cap Y$. Infolge der Kompaktheit der Untermenge Y hat das Netz $\mathfrak{N} = \{x_\sigma : \sigma \in S\}$ mindestens einen Häufungspunkt y in Y. Für jede Umgebung U von y und jeden Index $\bar{\sigma} \in S$ existiert also ein Index $\sigma \in S$, für den $x_\sigma \in U$ und $\bar{\sigma} < \sigma$ gilt. Wegen $x_\sigma \in \overline{X}_\sigma$ gilt dann $\overline{X}_\sigma \cap U \neq 0$. Daher ist y eine Häufungsstelle des Netzes $\mathfrak{N}$. Nach Voraussetzung (1) und Satz 1 gilt $H_\mathfrak{N} = \overline{X}_\varrho < V\overline{X}_0$, während das Element y der Untermenge $Y = \overline{X} \setminus V\overline{X}_0$ angehört, also nicht in $H_\mathfrak{N}$ enthalten sein kann. Dies führt auf einen Widerspruch. Hilfssatz 4 ist somit bewiesen.

Hilfssatz 5. *Es sei $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$, sowie ein Element $x_i \in \overline{X}_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und eine offene Umgebung V der Einheit in $\overline{X}$ gegeben. Dann ist $\overline{\mathfrak{U}}_i = \{\overline{X}_\varrho : \overline{X}_\varrho \cap Vx_i \neq 0\}$ offen in $\overline{\mathfrak{X}}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis wieder indirekt und nehmen an, es gebe ein (konvergentes) Netz $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ in $\overline{\mathfrak{X}} \setminus \overline{\mathfrak{U}}_i$, für das

$$\lim_{\mathfrak{N}} \overline{X}_\sigma = \overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}_i \tag{2}$$

gilt.

Wir wählen ein Element x_ϱ in dem nach Voraussetzung nicht leeren Durchschnitt $\overline{X}_\varrho \cap Vx_i$. Wegen (2) und Satz 1 gilt $x_\varrho \in K_\mathfrak{N}$. Andrerseits ist Vx_i eine Umgebung von x_ϱ und $\overline{X}_\sigma \cap Vx_i = 0$ für alle $\sigma \in S$. Dies widerspricht der Definition von $K_\mathfrak{N}$. Hilfssatz 5 ist damit bewiesen.

Hilfssatz 6. *Es seien $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$, $x_i \in \overline{X}_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und eine offene Umgebung V der Einheit in $\overline{X}$ beliebig gegeben. Dann ist $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ eine offene Umgebung von $\overline{X}_0$ in $\overline{\mathfrak{X}}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Beziehungen

$$\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V),$$

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V) = \bigcap_{j=0}^{n} \overline{\mathfrak{U}}_j$$

und den Hilfssätzen 4 und 5.

Aus der Theorie der topologischen Gruppen entnehmen wir folgenden Hilfssatz und geben der Vollständigkeit halber seinen Beweis:

Hilfssatz 7. *Es seien Y eine abgeschlossene und Z eine zu Y fremde kompakte Untermenge der Hausdorffschen topologischen Gruppe X. Dann existiert eine Umgebung W der Einheit in X derart, daß $WY \cap Z = 0$ gilt.*

Beweis. Es sei z ein festes Element von Z. Da Y abgeschlossen ist, existiert eine Umgebung V_z der Einheit in X derart, daß

$$Y \cap V_z z = 0 \tag{3}$$

gilt.

Ist W_z eine symmetrische Umgebung der Einheit in X derart, daß $W_z^2 < V_z$ ist, dann gilt weiter

$$W_z Y \cap W_z z = 0. \tag{4}$$

Wäre nämlich $w_1 y = w_2 z$ $(w_1, w_2 \in W_z,\ y \in Y)$, so würde $v = w_1^{-1} w_2 \in V_z$ und $y = vz$ gelten, im Widerspruch zu (3).

Wir lassen nun z alle Elemente von Z durchlaufen und erhalten eine Überdeckung von Z durch offene Mengen $W_z z$. Es sei $\{W_{z_i} z_i : i = 1, \ldots, n\}$ eine endliche Teil-Überdeckung von Z und $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{z_i}$. Dann gilt nach (4)

$$WY \cap \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i} z_i = 0,$$

also um so mehr die Behauptung.

Hilfssatz 8. *Die Familie $\overline{\mathfrak{U}}$ ist ein vollständiges Umgebungssystem für eine Hausdorffsche Topologie $\mathfrak{T}_1$ in $\overline{\mathfrak{X}}$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 6 ist $\overline{\mathfrak{X}}$ die Vereinigung aller Elemente von $\overline{\mathfrak{U}}$. Wir müssen noch nachweisen, daß der Durchschnitt zweier Elemente von $\overline{\mathfrak{U}}$ mit jeder Untergruppe $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$ wieder ein $\overline{X}_0$ enthaltendes Element der Familie $\overline{\mathfrak{U}}$ enthält und daß je zwei verschiedene Elemente von $\overline{\mathfrak{X}}$ zueinander fremde Umgebungen aus der Familie $\overline{\mathfrak{U}}$ besitzen.

Es sei $\overline{\mathfrak{U}}_i = \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_i; x_{i1}, \ldots, x_{in_i}; V_i)$ $(i = 1, 2)$, ferner $\overline{\mathfrak{U}}_1 \cap \overline{\mathfrak{U}}_2 \neq 0$ und $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{U}}_1 \cap \overline{\mathfrak{U}}_2$, d. h.

$$\overline{X}_0 \cap V_i x_{ij} \neq 0 \quad \text{für } i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n_i,$$

und

$$\overline{X}_0 < V_i \overline{X}_i \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Die Untermenge $V_1 \overline{X}_1 \cap V_2 \overline{X}_2$ von $\overline{X}$ ist offen in $\overline{X}$, ihr Komplement $\overline{X} \setminus (\overline{V}_1 X_1 \cap V_2 \overline{X}_2)$ also kompakt und zu $\overline{X}_0$ fremd. Nach Hilfssatz 7 existiert eine offene Umgebung W_0 der Einheit in $\overline{X}$ derart, daß $W_0 \overline{X}_0 < (V_1 \overline{X}_1 \cap V_2 \overline{X}_2)$ gilt.

Für jedes Indexpaar i, j $(i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n_i)$ wählen wir ein Element x'_{ij} aus dem nicht leeren Durchschnitt $\overline{X}_0 \cap V_i x_{ij}$. Es sei W_{ij} eine offene Umgebung der Einheit in $\overline{X}$ derart, daß $W_{ij} x'_{ij} < V_i x_{ij}$ gilt. Wir setzen $W = W_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{2} \bigcap_{j=1}^{n_i} W_{ij} \right)$ und erhalten

$$W \overline{X}_0 < V_i \overline{X}_i \quad \text{für } i = 1, 2$$

und

$$W x'_{ij} < V_i x_{ij} \quad \text{für } i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n_i.$$

Es sei nun $\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}_0 = \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x'_{11}, \ldots, x'_{1n_1}, x'_{21}, \ldots, x'_{2n_2}; W)$. Wegen $\overline{X}_\varrho < W \overline{X}_0$ gilt $\overline{X}_\varrho < V_i \overline{X}_i$ für $i = 1, 2$. Aus $\overline{X}_\varrho \cap W x'_{ij} \neq 0$ folgt ferner $\overline{X} \cap V_i x_{ij} \neq 0$ für $i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, n_i$. Es ergibt sich $\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}_1 \cap \overline{\mathfrak{U}}_2$ und damit $\overline{\mathfrak{U}}_0 < \overline{\mathfrak{U}}_1 \cap \overline{\mathfrak{U}}_2$.

Es sei schließlich $\overline{X}_1 \neq \overline{X}_2$, etwa $x_1 \in \overline{X}_1$, aber $x_1 \notin \overline{X}_2$. Dann existiert eine offene Umgebung W der Einheit e in $\overline{X}$ derart, daß $W x_1 \cap W \overline{X}_2 = 0$ gilt. Hieraus folgt

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_1; x_1; W) \cap \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_2; e; W) = 0.$$

Also ist $\mathfrak{T}_1$ Hausdorffsch.

Beweis von Satz 2. Es sei $\mathfrak{T}_2$ die schwache Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$. Da jedes Element der Familie $\overline{\mathfrak{U}}$ nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{T}_2$-offen ist, ist $\mathfrak{T}_1$ nicht größer als $\mathfrak{T}_2$. Da aber $\overline{\mathfrak{X}}$ in $\mathfrak{T}_1$ Hausdorffsch und in $\mathfrak{T}_2$ kompakt ist, gilt $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ (s. [4] 5, Theorem 8).

Korollar 2. 1. *Es seien $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$, $f_i \in \mathfrak{C}(\overline{X})$ $(i = 1, \ldots, m)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge von Elementen $x_j \in \overline{X}_0$ $(j = 1, \ldots, n)$ und eine offene Umgebung V der Einheit in X derart, daß aus $\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ die Ungleichungen*

$$|\mu_\varrho(f_i) - \mu_0(f_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

folgen.

Umgekehrt existiert zu jeder Untermenge $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ *von* $\overline{\mathfrak{X}}$ *eine endliche Anzahl von Funktionen* $f_i \in \mathfrak{C}(\overline{X})$ $(i = 1, \ldots, m)$ *und eine reelle Zahl* $\varepsilon > 0$ *derart, daß aus*

$$|\mu_\varrho(f_i) - \mu_0(f_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

die Beziehung $\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; V)$ *folgt.*

Beweis. Das Korollar stellt nur fest, daß die eingeführten Umgebungssysteme von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ äquivalent sind, d. h., daß jede Umgebung der Topologie $\mathfrak{T}_1$ eine Umgebung der Topologie $\mathfrak{T}_2$ enthält und umgekehrt.

Aus den Beweisen der Hilfssätze 4 bis 8 geht hervor, daß V auf ein beliebiges vollständiges Umgebungssystem der Einheit in $\overline{X}$ beschränkt werden kann. Wir bemerken noch, daß auch folgende Familie von Untermengen von $\overline{\mathfrak{X}}$, die $\overline{\mathfrak{U}}$ als Teilfamilie enthält, als vollständiges Umgebungssystem in $\overline{\mathfrak{X}}$ die schwache Topologie definiert: es sei $\overline{X}_0 \in \overline{\mathfrak{X}}$, $x_i \in \overline{X}_0$ und V_i eine beliebige offene Umgebung von x_i für $i = 1, \ldots, n$, sowie V_0 eine beliebige offene Umgebung von $\overline{X}_0$ in $\overline{X}$. Für jede solche Wahl sei

$$\overline{\mathfrak{W}}(\overline{X}_0; V_1, \ldots, V_n; V_0) = \{\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{X}} : \overline{X}_\varrho \cap V_i \neq 0 \ (i = 1, \ldots, n);\ \overline{X}_\varrho < V_0\}$$

und $\overline{\mathfrak{W}}$ sei die Familie aller solcher Untermengen von $\overline{\mathfrak{X}}$. Die Behauptung folgt daraus, daß jede dieser Untermengen in $\overline{\mathfrak{X}}$ offen ist, was sich wie in den Hilfssätzen 4 bis 6 beweisen läßt.

4.

Wir betrachten einige Beispiele zur Illustration von Satz 2.

Es sei $\overline{X}$ die eindimensionale Torusgruppe, aufgefaßt als additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1. Eine abgeschlossene Untergruppe ist entweder diskret und daher endlich und zyklisch oder dicht in $\overline{X}$ und daher identisch mit $\overline{X}$. Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen und $\overline{X}_n$ $(n \in N)$ die durch $\frac{1}{n}$ erzeugte, eindeutig bestimmte Untergruppe der Ordnung n, also $\overline{\mathfrak{X}} = \{\overline{X}, \overline{X}_n : n \in N\}$.

Jede Untergruppe $\overline{X}_n$ $(n \in N)$ ist isoliert in $\overline{\mathfrak{X}}$. Um uns davon zu überzeugen, wählen wir als vollständiges Umgebungssystem der Einheit $e = 0$ in $\overline{X}$ die Familie der bezüglich 0 symmetrischen offenen Intervalle V und geben jedes soche durch seine halbe Länge $\varepsilon < \frac{1}{2}$ an. Setzen wir $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{3n}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$, so gilt jedenfalls $\overline{X} \notin \overline{\mathfrak{U}}_n = \overline{\mathfrak{U}}\left(\overline{X}_n; \frac{1}{n}; \varepsilon\right)$. Aus $0 < \frac{1}{m} < \varepsilon$ folgt, daß das Intervall $\left]\varepsilon, \frac{1}{n} - \varepsilon\right[$ die Länge $\frac{1}{n} - 2\varepsilon \geqq \frac{1}{3n} \geqq \varepsilon > \frac{1}{m}$ hat und ein Element von $\overline{X}_m$ enthalten muß. Dann gilt aber $\overline{X}_m \notin \overline{X}_n + V$, also auch $\overline{X}_m \notin \overline{\mathfrak{U}}_n$. Aus $\overline{X}_m \in \overline{\mathfrak{U}}_n$ folgt also, daß das kleinste positive Element $\frac{1}{m}$ von $\overline{X}_m$ im Intervall $\left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[$ liegen muß. Aus $\frac{1}{m} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ folgt aber $m < n + 1$, und für $n \neq 1$ folgt aus $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}$ die Ungleichung $m > n - 1$, also $m = n$ (die letzte Ungleichung ist für $n = 1$ trivialerweise erfüllt).

Sind $x_1, \ldots, x_k$ beliebige Elemente von $\overline{X}$, so enthält andrerseits $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}; x_1, \ldots, x_k; \varepsilon)$ alle Untergruppen $\overline{X}_n$ für $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Es ist also $\overline{\mathfrak{X}}$ homöomorph zur Einpunkt-Kompak-

tifizierung eines abzählbaren diskreten Raumes, die wir uns bei Einbettung von $\bar{\bar{\mathfrak{x}}}$ in den Euklidischen Raum als eine konvergente Punktfolge $\{\bar{X}_n\}$ samt ihrem Grenzpunkt $\bar{X}$ vorstellen können. Die Konvergenz von $\{\bar{X}_n\}$ gegen $\bar{X}$ entspricht der Tatsache, daß das Integral einer stetigen Funktion der reellen Variablen durch Riemannsche Summen approximiert werden kann.

Es sei nun $\bar{X}$ die zweidimensionale Torusgruppe, d. h. das direkte Produkt zweier eindimensionaler Torusgruppen $\bar{X}'$ und $\bar{X}''$, die wir wieder als Gruppen der reellen Zahlen mod 1 auffassen.

Eine abgeschlossene, nicht diskrete, zusammenhängende Untergruppe $\bar{X}_0$ von $\bar{X}$ wird bereits von einem einzigen Element x_0 erzeugt (s. [1] 6, Satz 5). Ist eine der beiden Projektionen x_0' und x_0'' von x_0 auf $\bar{X}'$ bzw. $\bar{X}''$, etwa x_0', rational, so besteht $\bar{X}_0$ aus einer endlichen Anzahl von Restklassen von $\bar{X}''$. Da $\bar{X}_0$ zusammenhängend ist, muß $\bar{X}_0 = \bar{X}''$ (oder, entsprechend, $\bar{X}_0 = \bar{X}'$) gelten. Es seien nun x_0' und x_0'' irrational und rational unabhängig, also

$$k' x_0' + k'' x_0'' \not\equiv 0 \pmod 1$$

für alle ganzen Zahlen k', k'' außer $k' = k'' = 0$. Dann erzeugt $x_0 = (x_0', x_0'')$ ganz $\bar{X}$, (s. [1] 4, Satz 2), also gilt $\bar{X}_0 = \bar{X}$.

Schließlich seien x_0' und x_0'' irrational, aber rational abhängig, also

$$k' x_0' + k'' x_0'' \equiv 0 \pmod 1, \quad k', k'' \text{ ganz}, \ (k', k'') \neq (0, 0).$$

Ferner sei $\frac{k'}{k''} = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganz und teilerfremd, sowie q positiv sein soll. Wir weisen zunächst nach, daß dann $\bar{X}_0$ bereits durch ein Element $x_1 = (x_1', x_1'')$ erzeugt wird, für das

$$p x_1' + q x_1'' \equiv 0 \pmod 1$$

gilt.

Ist $\bar{k}$ eine beliebige ganze von 0 verschiedene Zahl, dann erzeugt $\bar{k} x_0 = (\bar{k} x_0', \bar{k} x_0'')$ eine in $\bar{X}_0$ enthaltene abgeschlossene Untergruppe $\bar{X}_1$ von $\bar{X}$. Offensichtlich gilt $\bar{X}_0 = \bigcup_{k=0}^{|\bar{k}|-1} (\bar{X}_1 + k x_0)$. Da $\bar{X}_0$ zusammenhängend ist, müssen alle Restklassen $\bar{X}_1 + k x_0$ $(0 \leqq k < |\bar{k}|)$ zusammenfallen, und es gilt $\bar{X}_1 = \bar{X}_0$. Wir setzen nun $x_1 = (k'' x_0', k'' x_0'')$. Nach dem eben Gesagten wird $\bar{X}_0$ durch x_1 erzeugt. Außerdem gilt aber

$$p x_1' + q x_1'' = p k'' x_0' + q k'' x_0'' = q k' x_0' + q k'' x_0'' \equiv 0 \pmod 1.$$

Offenbar sind x_1' und x_1'' wieder irrational.

Da x_1 die Untergruppe $\bar{X}_0$ erzeugt, gilt auch für jedes beliebige Element $x = (x', x'') \in \bar{X}_0$ die Beziehung

$$p x' + q x'' \equiv 0 \pmod 1. \tag{5}$$

Andrerseits ist nach dem Kroneckerschen Approximationssatz (s. [5] VII, Satz 4) jedes Element $x = (x', x'')$ von $\bar{X}$, das der Bedingung (5) genügt, ein Häufungspunkt ganzzahliger Vielfacher von x_1 (mod 1), d. h. ein Element von $\bar{X}_0$. Aus

$$l' x_1' + l'' x_1'' \equiv 0 \pmod 1, \quad l', l'' \text{ ganz}, \ (l', l'') \neq (0, 0)$$

folgt nämlich

$$ql'x_1' + ql''x_1'' \equiv 0 \pmod 1$$
$$l''px_1' + l''qx_1'' \equiv 0 \pmod 1,$$

also

$$(l'q - l''p)\, x_1' \equiv 0 \pmod 1$$

und, da x_1' irrational ist, $\frac{l'}{l''} = \frac{p}{q}$, d. h. $l' = lp$ und $l'' = lq$. Dann gilt aber auch

$$l'x' + l''x'' = l(px' + qx'') \equiv 0 \pmod 1.$$

Aus der eben durchgeführten Rechnung folgt einerseits, daß $\overline{X}_0$ durch die Angabe von $p \neq 0$ und $q > 0$ eindeutig bestimmt ist, andrerseits aber auch, daß die zueinander teilerfremden ganzen Zahlen $p \neq 0$ und $q > 0$ durch Angabe von $\overline{X}_0$ eindeutig bestimmt sind. Ordnen wir noch den Untergruppen $\overline{X}'$ und $\overline{X}''$ die Zahlenpaare $(0, 1)$ und $(1, 0)$ zu, dann besteht also zwischen den Zahlenpaaren (p, q) (p, q ganz, teilerfremd, $q \geqq 0$) und den abgeschlossenen, nicht diskreten, zusammenhängenden echten Untergruppen von $\overline{X}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, sobald wir uns davon überzeugt haben, daß die Untergruppe aller Elemente von $\overline{X}$, die (5) erfüllen, tatsächlich nicht diskret und zusammenhängend ist.

Für $(p, q) = (0, 1)$ oder $(p, q) = (1, 0)$ ist dies trivial. Für $q > 0$, $p \neq 0$ ist die Menge dieser Punkte identisch mit der Menge aller Punkte der Geraden

$$x'' = -\frac{p}{q}x' + \frac{k}{q}, \quad k \text{ ganz}, \tag{6}$$

die gleichzeitig dem Einheitsquadrat im 1. Quadranten der $[x', x'']$-Ebene, jedoch nicht seiner oberen oder rechten Seitenkante angehören. Dabei können wir k wegen $0 \leqq px' + qx'' < p + q$ für $p > 0$ bzw. $-|p| < px' + qx'' < q$ für $p < 0$ auf $0 \leqq k < p + q$ bzw. $-|p| < k < q$ beschränken (im Falle $p > 0$ liegt auf der Geraden (6) für $k = 0$ nur der Ursprung im Einheitsquadrat). Diese Punktmenge ist in $\overline{X}$ tatsächlich zusammenhängend und nicht diskret. Wir erhalten sie nämlich auch, indem wir in der $[x', x'']$-Ebene den Punkt $(q, -p)$ mit 0 durch eine Strecke verbinden und (im Falle $p > 0$ unter Hinzunahme des Ursprunges) die $(p + q - 1)$ von dieser Strecke durchschnittenen Gitterquadrate mit dem Einheitsquadrat identifizieren.

Aus den eben angestellten geometrischen Überlegungen folgt noch, daß die Teilstrecken der Punktmenge $\overline{X}_0$ im Einheitsquadrat der $[x', x'']$-Ebene für $p \neq 0$ die x'-Achse in den Punkten $x' = \frac{k}{|p|}$ $(0 \leqq k < |p|)$ und für $q \neq 0$ die x''-Achse in den Punkten $x'' = \frac{k}{q}$ $(0 \leqq k < q)$ schneiden. Der Abstand benachbarter Teilstrecken ist daher $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Die einzige diskrete zusammenhängende Untergruppe ist die nur aus der Einheit bestehende Untergruppe. Eine abgeschlossene unzusammenhängende Untergruppe von $\overline{X}$ besteht aus einer endlichen Anzahl (n) von Restklassen der in ihr enthaltenen abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppe. Sie kann identifiziert werden mit der Menge aller Punkte (x', x'') im Einheitsquadrat der $[x', x'']$-Ebene, die

$$npx' + nqx'' \equiv 0 \pmod 1$$

erfüllen. Die entsprechenden Teilstrecken schneiden die Achsen in den Punkten $x' = \frac{k}{|np|}$ $(0 \leqq k < |np|)$ bzw. $x'' = \frac{k}{nq}$ $(0 \leqq k < nq)$; der Abstand benachbarter Teilstrecken ist $\frac{1}{n\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{(np)^2+(nq)^2}}$.

Ähnlich wie im Falle der eindimensionalen Torusgruppe überzeugt man sich davon, daß jede abgeschlossene diskrete Untergruppe von $\overline{X}$ in $\overline{\mathfrak{X}}$ isoliert ist. Andrerseits ist leicht einzusehen, daß jede abgeschlossene nicht diskrete Untergruppe in $\overline{\mathfrak{X}}$ Grenzpunkt der in ihr enthaltenen diskreten Untergruppen und daher nicht isoliert ist. Wir beschränken uns bei der weiteren Untersuchung der Struktur von $\overline{\mathfrak{X}}$ auf den Unterraum der abgeschlossenen nicht diskreten Untergruppen, der in diesem Beispiel mit der ersten Ableitung $\overline{\mathfrak{X}}'$ des Raumes $\overline{\mathfrak{X}}$ zusammenfällt und daher selbst abgeschlossen und kompakt ist.

Eine Einbettung des Raumes $\overline{\mathfrak{X}}'$ in die euklidische zweidimensionale $[\xi, \eta]$-Ebene erhalten wir etwa folgendermaßen: Es sei $\overline{X}_0$ ein von $\overline{X}$ verschiedenes Element von $\overline{\mathfrak{X}}'$. Der Komponente der Einheit von $\overline{X}_0$ sei das Zahlenpaar (p, q) (p, q teilerfremd, ganz, $q \geqq 0$) zugeordnet und $\overline{X}_0$ bestehe aus n verschiedenen Restklassen dieser Komponente. Dann ordnen wir der Untergruppe $\overline{X}_0$ das Zahlenpaar (np, nq) zu. Damit ergibt sich eine eineindeutige Zuordnung zwischen den von $\overline{X}$ verschiedenen Elementen von $\overline{\mathfrak{X}}'$ und den Gitterpunkten der oberen $[\xi, \eta]$-Halbebene, von der die negative ξ-Achse entfernt wurde. Auf diese Halbebene üben wir nun eine Inversion bezüglich des Kreises um den Ursprung mit dem Radius 1 aus und ordnen dann dem Koordinatenursprung die Gruppe $\overline{X}$ zu.

Um nachzuweisen, daß dieses Verfahren eine Einbettung von $\overline{\mathfrak{X}}'$ in die euklidische $[\xi, \eta]$-Ebene liefert, zeigen wir zuerst, daß jede von $\overline{X}$ verschiedene Untergruppe $\overline{X}_0 = (m, n)$ in $\overline{\mathfrak{X}}'$ isoliert liegt. Wir geben die offenen kreisförmigen Umgebungen der Einheit in $\overline{X}$ wieder durch ihren Radius ε an und setzen zunächst $p \neq 0$ und $q \neq 0$ voraus. Wir bezeichnen die von der Einheit verschiedenen, ihr auf der positiven x'- bzw. x''-Achse am nächsten liegenden Punkte von $\overline{X}_0$, falls solche vorhanden sind, mit x_1' bzw. x_1''; andernfalls sollen x_1' bzw. x_1'' die Einheit bedeuten. Ferner sei $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{3\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{1}{m(m+1)}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$ und $\overline{\mathfrak{U}}_0 = \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}_0; x_1', x_1''; \varepsilon)$. Jedenfalls gilt dann $\overline{X} \notin \overline{\mathfrak{U}}_0$ sowie $(0, k) \notin \overline{\mathfrak{U}}_0$ und $(k, 0) \notin \overline{\mathfrak{U}}_0$ für alle zugelassenen ganzen Zahlen k. In ähnlicher Weise wie bei dem ersten betrachteten Beispiel schließen wir aus $(m_1, n_1) \in \overline{\mathfrak{U}}_0$ auf $\frac{1}{m_1} > \frac{1}{m} - \varepsilon \geqq \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1}$, also auf $m_1 < m+1$; andrerseits muß für $m \neq 1$ auch $\frac{1}{m_1} < \frac{1}{m} + \varepsilon < \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1}$, also $m_1 > m-1$ gelten. Für $m = 1$ ist die letzte Ungleichung trivialerweise erfüllt. Es ergibt sich $m = m_1$ und ebenso $n = n_1$. Für $m = 0$ oder $n = 0$ erfahren die eben angestellten Überlegungen geringfügige Modifikationen.

Es sei nun $\overline{\mathfrak{U}}_0 = \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}; x_1, \ldots, x_k; \varepsilon)$ eine Umgebung von $\overline{X}$ in $\overline{\mathfrak{X}}'$. Dann enthält $\overline{\mathfrak{U}}_0$ jedenfalls alle Untergruppen (m, n), die $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} < 2\varepsilon$ erfüllen, also alle Untergruppen, die im invertierten Gitterpunktfeld innerhalb eines Kreises vom Radius 2ε um den Ursprung liegen. Ist umgekehrt $\overline{\mathfrak{U}}_\varepsilon$ die Menge aller Untergruppen (m, n) in $\overline{\mathfrak{X}}'$, die im invertierten Gitterpunktfeld vom Ursprung einen kleineren Abstand als ε haben, so

liegen nur endlich viele Untergruppen in $\overline{\mathfrak{X}}'$ außerhalb von $\overline{\mathfrak{U}}_\varepsilon$. Durch passende Wahl endlich vieler Elemente $x_1, \ldots, x_k$ in $\overline{X}$ und eines genügend kleinen $\delta > 0$ können wir dann erreichen, daß $\overline{\mathfrak{U}}_1 = \overline{\mathfrak{U}}(\overline{X}; x_1, \ldots, x_k; \delta)$ nur Untergruppen aus $\overline{\mathfrak{U}}_\varepsilon$ enthält, d. h. daß $\overline{\mathfrak{U}}_1 < \overline{\mathfrak{U}}_\varepsilon$ gilt. Damit ist die Äquivalenz der Umgebungssysteme von $\overline{\mathfrak{X}}'$ und der invertierten Gitterpunktmenge erwiesen.

Wir betrachten schließlich die (nicht abelsche) Diedergruppe des Kreises und schreiben die Gruppenoperationen wieder multiplikativ. Die Komponente der Einheit e in $\overline{X}$ ist ein Normalteiler $\overline{K}$ vom Index 2, der isomorph zur eindimensionalen Torusgruppe ist. Wir zeichnen ein beliebiges Element e' der von $\overline{K}$ verschiedenen Restklasse, die wir mit $\overline{K}'$ bezeichnen, aus und bezeichnen für $x \in \overline{K}$ das Element $e'x$ mit x'. Es gelten die Rechenregeln $x'y = (xy)'$, $xy' = (x^{-1}y)'$, $x'y' = x^{-1}y$.

Mit jeder abgeschlossenen Untergruppe $\overline{X}_1$ von $\overline{K}$ ist für beliebiges $z' \in \overline{K}'$ auch $\overline{X}_2 = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_1 z'$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\overline{X}$. Mit $x \in \overline{X}_1$, $y \in \overline{X}_1$ gilt nämlich auch $x(yz') = (xy)\,z' \in \overline{X}_2$, $(yz')\,x = (yx^{-1})\,z' \in \overline{X}_2$, $(xz')\,(yz') = xy^{-1} \in \overline{X}_2$ und $(xz')^{-1} = z'x^{-1} = xz' \in \overline{X}_2$. Umgekehrt ist jede Untergruppe $\overline{X}_0$ von $\overline{X}$ entweder bereits in $\overline{K}$ enthalten, oder es gilt für beliebiges $z' \in \overline{X}_0 \cap \overline{K}'$

$$\overline{X}_0 = (\overline{X}_0 \cap \overline{K}) \cup (\overline{X}_0 \cap \overline{K})\,z'.$$

Aus $z' \in \overline{X}_0 \cap \overline{K}'$ und $y' \in \overline{X}_0 \cap \overline{K}'$ folgt nämlich $y'z' = y^{-1}z \in \overline{X}_0$ und $y' = (y'z')z' = (y^{-1}z)z'$, also $y' \in (\overline{X}_0 \cap \overline{K})\,z'$.

Die abgeschlossenen Untergruppen von $\overline{X}$ sind also genau die abgeschlossenen Untergruppen von $\overline{K}$ und ihre mittels beliebiger Elemente von K' erzeugten Diedergruppen. Um Einblick in die topologische Struktur des Raumes $\overline{\mathfrak{X}}$ zu erhalten, wählen wir als vollständiges Umgebungssystem der Einheit e in $\overline{X}$ wieder die Familie der bezüglich e symmetrischen offenen Intervalle von der Länge $2\varepsilon < 1$. Genau wie im ersten betrachteten Beispiel erkennen wir, daß die diskreten, in $\overline{K}$ enthaltenen Untergruppen in $\overline{\mathfrak{X}}$ isoliert sind und eine gegen $\overline{K}$ konvergente Folge bilden. Die Untergruppe $\overline{K}$ liegt isoliert von allen abgeschlossenen Dieder-Untergruppen von $\overline{X}$. Eine diskrete Dieder-Untergruppe von $\overline{X}$ von der Ordnung $2n$ (wir rechnen zu diesen auch die Untergruppen der Ordnung 2 von $\overline{X}$, deren Durchschnitt mit $\overline{K}'$ nicht leer ist) enthält genau ein Element x', für das x in der Torusgruppe $\overline{K}$ dem Intervall $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ angehört. Die verschiedenen diskreten Dieder-Untergruppen der Ordnung $2n$ sind diesen Elementen x' eineindeutig zugeordnet und bilden in $\overline{\mathfrak{X}}$ eine zu einem Kreis homöomorphe offene und abgeschlossene Untermenge. In ähnlicher Weise wie bei den vorangehenden Beispielen erkennt man, daß der Raum $\overline{\mathfrak{X}}$ in die zweidimensionale euklidische Ebene als Vereinigungsmenge einer konvergenten Punktfolge samt Grenzpunkt $\overline{K}$ und einer Folge konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt $\overline{X}$ und dem Radius $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eingebettet werden kann.

5.

Wir werden im folgenden in analoger Weise, wie dies für eine kompakte Hausdorffsche Gruppe geschehen ist, auch für eine beliebige abstrakte Gruppe X topologische Untergruppenräume definieren. Um entsprechend verwertbare Verbindungen zwischen diesen beiden Fällen herzustellen, schicken wir einige vorbereitende Bemerkungen voraus.

Greifen wir aus einer kompakten Hausdorffschen Gruppe $\overline{X}$ eine in $\overline{X}$ dichte Untergruppe X heraus, und sehen wir von jeder topologischen Struktur in X ab, so ergibt sich durch Beschränkung der Algebra $\mathfrak{C}(\overline{X})$ auf die Untergruppe X eine komplexe Algebra $\mathfrak{A}$ von komplexwertigen fastperiodischen Funktionen auf X mit folgenden Eigenschaften: $\mathfrak{A}$ ist vollständig bezüglich der Norm $\| f \| = \sup_{a \in X} | f(x) |$ $(f \in \mathfrak{A})$, selbst-konjugiert und zweiseitig invariant, d. h. mit f ist auch jede Links- und Rechtstranslation ${}_af$ und f_a von f mittels eines beliebigen Elementes $a \in X$ in $\mathfrak{A}$ enthalten; dabei ist ${}_af$ durch ${}_af(x) = f(ax)$ und f_a durch $f_a(x) = f(xa)$ erklärt. Eine derartige (komplexe) Algebra von fp. Funktionen heißt ein voller Modul von fp. Funktionen. Bedeutet $M(f)$ den über X erstreckten Mittelwert der Funktion f und f'' die stetige Funktion auf $\overline{X}$, deren Beschränkung auf X die Funktion f ist, so gilt $\mu(f'') = \int_{\overline{X}} f''(x)\, d\mu(x) = M(f)$.

Durch eine Umkehrung dieses Vorganges läßt sich jeder abstrakten Gruppe X mittels eines gegebenen vollen Moduls von fp. Funktionen auf X eine kompakte Hausdorffsche Gruppe $\overline{X}''$ zuordnen, in der ein homomorphes Bild X' von X dicht liegt. Dabei ist X' isomorph zur Faktorgruppe von X nach dem Normalteiler $N(\mathfrak{A})$ aller Elemente x von X, für die $f(x) = f(e)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$ gilt. (Wenn $\mathfrak{A}$ die Punkte von X trennt, gilt $X' = X$, und X kann mit einer in $\overline{X}''$ dicht liegenden Untergruppe identifiziert werden.) Jede fp. Funktion $f \in \mathfrak{A}$ läßt sich dabei als fp. Funktion auf X' auffassen und eindeutig zu einer auf $\overline{X}''$ stetigen Funktion fortsetzen, und umgekehrt führt jede Funktion aus $\mathfrak{C}(\overline{X}'')$ auf Grund dieser Zuordnung zu einer Funktion aus $\mathfrak{A}$ (s. [6] IV, Satz 7).

Durch diese Bedingungen ist die kompakte Hausdorffsche Gruppe $\overline{X}''$ bis auf topologische Isomorphismen eindeutig bestimmt. Wir benötigen diese Tatsache jedoch nicht, werden deshalb künftig von der $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierung $\overline{X}''$ von X in dem Sinne sprechen, daß wir uns eine kompakte Hausdorffsche Gruppe $\overline{X}''$ mit den angeführten Eigenschaften herausgegriffen und festgehalten denken.

Für eine Funktion $f \in \mathfrak{A}$ sei f' die f eineindeutig zugeordnete Funktion auf X', die durch Identifizierung aller Punkte einer Restklasse von $N(\mathfrak{A})$ entsteht, und f'' die f' eineindeutig zugeordnete Funktion auf $\overline{X}''$, die durch Erweiterung von f' zu einer stetigen Funktion auf $\overline{X}''$ entsteht. Die Mengen dieser Funktionen bezeichnen wir entsprechend mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$. Ferner seien $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ beziehungsweise die kleinsten Topologien in X, X' und $\overline{X}''$, für die die Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ zu Algebren stetiger Funktionen werden. $\mathfrak{T}$ ist nicht notwendigerweise Hausdorffsch. Die Gruppen X, X' und $\overline{X}''$ sind topologische Gruppen in bezug auf diese Topologien, und es gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(X)$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}(X')$ und $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{C}(\overline{X}'')$ in bezug auf die entsprechenden Topologien. $\mathfrak{T}''$ ist die gegebene kompakte Hausdorffsche Topologie in $\overline{X}''$, $\mathfrak{T}'$ ist die relative Topologie in der Untermenge X' von $\overline{X}''$, und eine Untermenge von X ist dann und nur dann $\mathfrak{T}$-offen (d. h. in $\mathfrak{T}$ enthalten), wenn sie vollständiges Urbild einer $\mathfrak{T}'$-offenen Untermenge von X' bezüglich des Homomorphismus von X auf X' ist (s. [2] § 2).

Für eine Untermenge M von X soll M' ihr homomorphes Bild in X' bedeuten. Die abgeschlossenen Hüllen der Mengen M bzw. M' in X bzw. X' sollen durch $M^\sim$ und $M'^\sim$ bezeichnet werden. Es gilt dann $M'^\sim = M^{\sim\prime}$. Die abgeschlossene Hülle einer Menge M' in $\overline{X}''$ soll durch M'^{-} bezeichnet werden. Es gilt also $M'^\sim = M'^{-} \cap X'$.

Hilfssatz 9. *Für $M < X$ gilt $M'^{-} = M^{\sim\prime-}$.*

Beweis. Die Inklusion $M'^{-} < M^{\sim\prime\prime-}$ ist trivial. Es sei $x'' \in M^{\sim\prime\prime-}$ und V'' eine offene Umgebung von x'' in $\overline{X}''$. Dann gilt

$$M^{\sim\prime} \cap V'' \neq 0 \text{ und } M^{\sim\prime} \cap V'' = M'^{\sim} \cap V'' = M'^{-} \cap X' \cap V'' < M'^{-} \cap V''.$$

Wegen $M'^{-} \cap V'' \neq 0$ gilt bereits $M' \cap V'' \neq 0$, also $x'' \in M'^{-}$ und $M^{\sim\prime\prime-} < M'^{-}$.

Eine nicht negative reellwertige Funktion aus $\mathfrak{A}$ mit Werten zwischen 0 und 1, die in der Einheit von X einen positiven Wert annimmt, soll Umgebungsfunktion heißen. Für eine nicht negative reellwertige Funktion $f \in \mathfrak{A}$ sei $V(f)$ durch $V(f) = \{x \in X : f(x) > 0\}$ definiert. Entsprechend sind $V(f')$ und $V(f'')$ erklärt. Es gilt also $V(f)' = V(f') = V(f'') \cap X'$. Die Familie $\{V(f) : f$ ist eine Umgebungsfunktion$\}$ ist ein vollständiges Umgebungssystem der Einheit in $\mathfrak{T}$. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$.

Es sei $\mathfrak{X} = \{X_\varrho : \varrho \in R\}$ die Menge aller Untergruppen von X. Für $f \in \mathfrak{A}$ sei $M_\varrho(f)$ der über X_ϱ erstreckte Mittelwert der auf X_ϱ beschränkten (und daher auf X_ϱ fastperiodischen) Funktion f. Wir schreiben $X_\varrho \equiv X_\sigma$ für: $M_\varrho(f) = M_\sigma(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$. Dadurch ist in der Menge $\mathfrak{X}$ eine Kongruenzrelation definiert. Die X_ϱ enthaltende Kongruenzklasse sei mit $\overline{X}_\varrho$ bezeichnet und die Menge aller Kongruenzklassen mit $\overline{\mathfrak{X}}$. Diese Bezeichnungen werden im folgenden insofern gerechtfertigt, als wir nach Hilfssatz 10 die Kongruenzklasse $\overline{X}_\varrho$ mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\overline{X}''$ und nach Einführung einer entsprechenden Topologie daher $\overline{\mathfrak{X}}$ mit einem Unterraum von $\overline{\mathfrak{X}}''$ identifizieren können.

Hilfssatz 10. *Es gilt $X_\varrho \equiv X_\sigma$ dann und nur dann, wenn $X_\varrho'^{-} = X_\sigma'^{-}$ ist.*

Beweis. Die Kongruenz $X_\varrho \equiv X_\sigma$ ist äquivalent mit der Gleichung $X_\varrho^{\sim} = X_\sigma^{\sim}$ (s. [2] § 3, Satz 3). Aus ihr folgt weiter nach Hilfssatz 9 $X_\varrho'^{-} = X_\varrho^{\sim\prime-} = X_\sigma^{\sim\prime-} = X_\sigma'^{-}$.

Umgekehrt folgt aus $X_\varrho'^{-} = X_\sigma'^{-}$ die Gleichung

$$X_\varrho^{\sim\prime} = X_\varrho'^{\sim} = X_\varrho'^{-} \cap X' = X_\sigma'^{-} \cap X' = X_\sigma'^{\sim} = X_\sigma^{\sim\prime}$$

und hieraus für die vollständigen Urbilder dieser Mengen $X_\varrho^{\sim} = X_\sigma^{\sim}$, also $X_\varrho \equiv X_\sigma$.

Um die gewünschte Topologie in $\mathfrak{X}$ zu erhalten, könnten wir nun einfach die Topologie von $\overline{\mathfrak{X}}''$ auf $\overline{\mathfrak{X}}$ relativieren und durch Ausdehnung auf die vollständigen Urbilder der Kongruenzklassen auf $\mathfrak{X}$ übertragen, oder, was auf die gleiche Topologie führen würde, wie im Falle der kompakten Hausdorffschen Gruppe von der schwachen Topologie des zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Banachraumes $\mathfrak{A}^*$ ausgehen. Wir wollen jedoch auch hier die Topologie in $\mathfrak{X}$ bzw. $\overline{\mathfrak{X}}$ unabhängig von $\overline{\mathfrak{X}}''$ und $\mathfrak{A}^*$ durch ein geeignetes vollständiges Umgebungssystem definieren.

Es seien $X_0 \in \mathfrak{X}$, sowie $x_i \in X_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und eine Umgebungsfunktion $f \in \mathfrak{A}$ beliebig gegeben. Wir definieren

$$\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f) = \left\{ X_\varrho \in \mathfrak{X} : \sup_{x_\varrho \in X_\varrho} f(x_\varrho x_i^{-1}) > 0 \ (i = 1, \ldots, n), \ \inf_{x_\varrho \in X_\varrho} \left[\sup_{x_0 \in X_0} f(x_\varrho x_0) \right] > 0 \right\}.$$

Hilfssatz 11. *Die Menge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ enthält mit jeder Untergruppe X_ϱ auch alle Untergruppen der Kongruenzklasse $\overline{X}_\varrho$.*

Beweis. Es sei $X_\varrho \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ und $X_\sigma \equiv X_\varrho$. Wegen $\sup_{x_\varrho \in X_\varrho} f_{x_i^{-1}}(x_\varrho) > 0$ gilt $M_\sigma(f_{x_i^{-1}}) = M_\varrho(f_{x_i^{-1}}) > 0$ und daher $\sup_{x_\sigma \in X_\sigma} f_{x_i^{-1}}(x_\sigma) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Wir zeigen als nächstes $X_\varrho^{\sim} \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$. Wegen $X_\varrho^{\sim} \equiv X_\varrho$ haben wir dazu nur noch nachzuweisen, daß die Ungleichung $\alpha = \inf_{x_\varrho \in X_\varrho^{\sim}} \left[\sup_{x_0 \in X_0} f(x_\varrho x_0) \right] > 0$ gilt. Es sei $\varepsilon = \inf_{x_\varrho \in X_\varrho} \left[\sup_{x_0 \in X_0} f(x_\varrho x_0) \right]$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$. Nach Definition von α existiert

ein Element $x_{\varrho 1} \in X_\varrho^\sim$ derart, daß $\alpha > \sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_{\varrho 1} x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Zu f existiert ferner eine Umgebung V der Einheit in X derart, daß aus $xy^{-1} \in V$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt (s. [2] § 3, Hilfssatz 3). Es sei $x_{\varrho 2} \in X_\varrho \cap V x_{\varrho 1}$, also $x_{\varrho 2} x_{\varrho 1}^{-1} \in V$. Dann gilt $|f(x_{\varrho 2} x_0) - f(x_{\varrho 1} x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x_0 \in X_0$ und weiter $|\sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_{\varrho 2} x_0) - \sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_{\varrho 1} x_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, also auch $\alpha > \sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_{\varrho 2} x_0) - \varepsilon \geqq 0$.

Aus $X_\sigma \equiv X_\varrho$ folgt schließlich $X_\sigma < X_\sigma^\sim = X_\varrho^\sim \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ und, wegen $\inf\limits_{x_\sigma \in X_\sigma} \left[\sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_\sigma x_0)\right] \geqq \inf\limits_{x_\sigma \in X_\sigma^\sim} \left[\sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_\sigma x_0)\right] > 0$, die Beziehung $X_\sigma \in \mathfrak{U}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; f)$. Damit ist Hilfssatz 11 bewiesen.

Aus Hilfssatz 11 folgt, daß wir $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ auch als Untermenge von $\overline{\mathfrak{X}}$ auffassen können. Wir heben dies durch die Schreibweise $\mathfrak{U}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ hervor und sind nun in der Lage, einen dem Satz 2 entsprechenden Satz für eine beliebige abstrakte Gruppe X zu formulieren.

Satz 3. *Die Familie $\mathfrak{U}$ aller Untermengen $\mathfrak{U}(\overline{X}_\varrho; x_{\varrho 1}, \ldots, x_{\varrho n}; f)$ von $\overline{\mathfrak{X}}$ ($\overline{X}_\varrho \in \overline{\mathfrak{X}}$, $x_{\varrho i} \in X_\varrho$ für $i = 1, \ldots, n$, f eine Umgebungsfunktion in $\mathfrak{A}$) ist ein vollständiges Umgebungssystem für eine Hausdorffsche Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}$. Ist $\mathfrak{N} = \{\overline{X}_\sigma : \sigma \in S\}$ ein in dieser Topologie konvergentes Netz in $\overline{\mathfrak{X}}$, dann ist $\lim\limits_{\mathfrak{N}} \overline{X}_\sigma = \overline{X}_0$ gleichbedeutend mit $\lim\limits_{\mathfrak{N}} M_\sigma(f) = M_0(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$. In dieser Topologie ist $\overline{\mathfrak{X}}$ homöomorph zu einem Unterraum des topologischen Untergruppenraumes $\overline{\mathfrak{X}}''$ der $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierung $\overline{X}''$ von X.*

Wir schicken dem Beweis dieses Satzes noch einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 12. *Es gilt $\overline{X}_\varrho \in \mathfrak{U}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ dann und nur dann, wenn $X_\varrho'^- \in \overline{\mathfrak{U}}(X_0'^-; x_1', \ldots, x_n'; V(f''))$ ist.*

Beweis. Die Menge $\overline{\mathfrak{U}}(X_0'^-; x_1', \ldots, x_n'; V(f''))$ ist für $\overline{\mathfrak{X}}''$ definiert wie in Abschnitt 3. Es sei $\overline{X}_\varrho \in \mathfrak{U}(\overline{X}_0; x_1, \ldots, x_n; f)$, also $\sup\limits_{x_\varrho \in X_\varrho} f(x_\varrho x_i^{-1}) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\inf\limits_{x_\varrho \in X_\varrho} \left[\sup\limits_{x_0 \in X_0} f(x_\varrho x_0)\right] = \varepsilon > 0$. Dann gilt auch

$$\sup_{x_\varrho' \in X_\varrho'} f''(x_\varrho' x_i'^{-1}) > 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

und

$$\inf_{x_\varrho' \in X_\varrho'} \left[\sup_{x_0' \in X_0'} f''(x_\varrho' x_0')\right] = \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Aus (7) folgt unmittelbar

$$X_\varrho'^- \cap V(f'')\, x_i' \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Wir setzen $g = \sup\left(f - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$. Da der volle Modul $\mathfrak{A}$ die Konstanten und mit je zwei reellwertigen Funktionen auch deren Supremum und Infimum enthält, gilt $g \in \mathfrak{A}$. Wegen (8) gilt für jedes Element $x_\varrho' \in X_\varrho'$ die Ungleichung $\sup\limits_{x_0' \in X_0'} g''(x_\varrho' x_0') \geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt $X_\varrho' < V(g'')\, X_0'$ und weiter wegen $V(g'')^- < \left\{x'' \in \overline{X}'' : f''(x'') \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right\} < V(f'')$ die

Beziehung

$$X'^{-}_{\varrho} < [V(g'')\, X'_{\varrho}]^{-} < V(g'')^{-} X'^{-}_{0} < V(f'')\, X'^{-}_{0}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt schließlich $X'^{-}_{\varrho} \in \overline{\mathfrak{U}}(X'^{-}_{0};\ x'_1, \ldots, x'_n;\ V(f''))$.

Es sei nun umgekehrt $X'^{-}_{\varrho} \in \overline{\mathfrak{U}}(X'^{-}_{0};\ x'_1, \ldots, x'_n;\ V(f''))$. Wegen (9) existiert für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein Element $x'_{\varrho i} \in X'_{\varrho} \cap V(f'')\, x'_i$. Dann gilt $x'_{\varrho i} x'^{-1}_i \in V(f'')$ und weiter

$$\sup_{x'_{\varrho} \in X_{\varrho}} f'(x'_{\varrho} x'^{-1}_i) > 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Wegen $X'^{-}_{\varrho} < V(f'')\, X'^{-}_{0}$ existiert zu jedem Element $x''_{\varrho} \in X'^{-}_{\varrho}$ ein Element $x''_0 \in X'^{-}_{0}$, das $x''_{\varrho} \in V(f'')\, x''_0$ erfüllt. Daraus folgt weiter $x''_0 \in V(f'')^{-1} x''_{\varrho}$ und die Existenz eines Elementes $x'_0 \in X'_0 \cap V(f'')^{-1} x''_{\varrho}$. Es gilt also bereits $x''_{\varrho} \in V(f'')\, X'_0$ und $X'^{-}_{\varrho} < V(f'')\, X'_0$. Da X'^{-}_{ϱ} (in $\overline{X}''$) kompakt ist, existiert bereits eine endliche Menge von Elementen $x'_{01}, \ldots, x'_{0m}$ aus X'_0, für die

$$X'^{-}_{\varrho} < \bigcup_{j=1}^{m} V(f'')\, x'^{-1}_{0j} \tag{12}$$

gilt. Wir setzen $h'' = \sup \{f''_{x'_{0j}}:\ j = 1, \ldots, m\}$. Es gilt $h'' \in \mathfrak{A}''$. Aus (12) folgt $h''(x''_{\varrho}) > 0$ für alle $x''_{\varrho} \in X'^{-}_{\varrho}$ und infolge der Kompaktheit von X'^{-}_{ϱ} und der Stetigkeit von h'' weiter $\inf_{x''_{\varrho} \in X'^{-}_{\varrho}} h''(x''_{\varrho}) > 0$. Endlich gilt für jedes $x''_{\varrho} \in X'^{-}_{\varrho}$

$$\sup_{x'_0 \in X'_0} f(x''_{\varrho} x'_0) \geqq \sup \{f(x''_{\varrho} x'_{0j}):\ j = 1, \ldots, m\} = h(x''_{\varrho}).$$

Hieraus schließen wir

$$\inf_{x'_{\varrho} \in X'_{\varrho}} \left[\sup_{x'_0 \in X'_0} f'(x'_{\varrho} x'_0) \right] \geqq \inf_{x''_{\varrho} \in X'_{\varrho}} \left[\sup_{x'_0 \in X'_0} f''(x''_{\varrho} x'_0) \right] \geqq \inf_{x''_{\varrho} \in X'^{-}_{\varrho}} h''(x''_{\varrho}) > 0. \tag{13}$$

Da f auf den Restklassen von $N(\mathfrak{A})$ konstant ist, folgt aus (11) und (13) $\sup_{x_{\varrho} \in X_{\varrho}} f(x_{\varrho} x_i^{-1}) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\inf_{x_{\varrho} \in X_{\varrho}} \left[\sup_{x_0 \in X_0} f(x_{\varrho} x_0) \right] > 0$. Nach Definition von $\mathfrak{U}(X_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ f)$ gilt dann $X_{\varrho} \in \mathfrak{U}(X_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ f)$ und nach Hilfssatz 11 weiter $\overline{X}_{\varrho} \in \mathfrak{U}(\overline{X}_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ f)$.

Beweis von Satz 3. Nach Hilfssatz 10 ist durch die Zuordnung $\overline{X}_{\varrho} \to X'^{-}_{\varrho}$ eine eineindeutige Abbildung von $\overline{\mathfrak{X}}$ auf eine Untermenge $\overline{\mathfrak{X}}'$ von $\overline{\mathfrak{X}}''$ bestimmt. Wegen Hilfssatz 12 wird dabei die Menge $\mathfrak{U}(\overline{X}_0;\ x_1, \ldots, x_n;\ f)$ auf die Menge $\overline{\mathfrak{U}}(X'^{-}_{0};\ x'_1, \ldots, x'_n;\ V(f'')) \cap \overline{\mathfrak{X}}'$ abgebildet. Die erste und letzte Behauptung des Satzes 3 folgt dann aus Satz 2, da die Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(X'^{-}_{0};\ x'_1, \ldots, x'_n;\ V(f'')) \cap \overline{\mathfrak{X}}'$ ein vollständiges Umgebungssystem für die relative Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}'$ bilden. Es sei schließlich für $f \in \mathfrak{A}$ mit $M'_{\varrho}(f')$ der über X'_{ϱ} erstreckte Mittelwert der auf X'_{ϱ} beschränkten Funktion f' und mit $\mu''_{\varrho}(f'')$ das über X'^{-}_{ϱ} erstreckte Haar-Integral der auf X'^{-}_{ϱ} beschränkten Funktion f'' bezeichnet. Dann gilt $M_{\varrho}(f) = M'_{\varrho}(f') = \mu''_{\varrho}(f'')$ für alle $\varrho \in R$ und alle $f \in \mathfrak{A}$ (s. [2] § 3, Korollar 7. 1 und Satz 3). Der Rest der Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Zuordnung $\overline{X}_{\varrho} \to X'^{-}_{\varrho}$ ein Homöomorphismus ist, und aus der Definition der schwachen Topologie in $\overline{\mathfrak{X}}''$.

Korollar 3. 1. *Es seien* $X_0 \in \mathfrak{X}$, $f_i \in \mathfrak{A} (i = 1, \ldots, m)$ *und* $\varepsilon > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge von Elementen* $x_j \in X_0$ $(j = 1, \ldots, n)$ *und eine Um-*

gebungsfunktion $f \in \mathfrak{A}$ derart, daß aus $X_\varrho \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ die Ungleichungen

$$| M_\varrho(f_i) - M_0(f_i) | < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

folgen.

Umgekehrt existiert zu jeder Untermenge $\mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ von $\mathfrak{X}$ eine endliche Anzahl von Funktionen $f_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, \ldots, m)$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß aus

$$| M_\varrho(f_i) - M_0(f_i) | < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

die Beziehung $X_\varrho \in \mathfrak{U}(X_0; x_1, \ldots, x_n; f)$ folgt.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar 2. 1 und Satz 3.

Jedem vollen Modul $\mathfrak{A}$ von fp. Funktionen auf X entspricht auf diese Weise ein von $\mathfrak{A}$ abhängiger topologischer Untergruppenraum $\overline{\mathfrak{X}}$. Der in Abschnitt 3 besprochene Fall einer kompakten Hausdorffschen Gruppe $\overline{X}$ ordnet sich hier ein, wenn wir $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\overline{X})$ setzen. Betrachten wir an Stelle von $\mathfrak{X}$ die Untermenge $\mathfrak{Y}$ aller Normalteiler der Gruppe X, dann erhalten wir wie in [3] § 4 eine topologische Halbgruppe $\overline{\mathfrak{Y}}$.

Wir zeigen zum Abschluß an zwei Beispielen, daß im allgemeinen der Raum $\overline{\mathfrak{X}}$ weder kompakt noch (nach Identifizierung von $\overline{\mathfrak{X}}$ und $\overline{\mathfrak{X}}'$) dicht in $\overline{\mathfrak{X}}''$ zu sein braucht. Wir gehen dazu jedesmal von einer passend gewählten Gruppe $\overline{X}''$ aus.

Es sei zunächst $\overline{X}''$ die Diedergruppe des Kreises wie in Abschnitt 4 und $X = X'$ die in $\overline{X}''$ dichte Diedergruppe der rationalen Zahlen mod 1. Ferner sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Beschränkung von $\mathfrak{C}(\overline{X}'')$ auf X. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein voller Modul fastperiodischer Funktionen auf X und $\overline{X}''$ eine $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierung von X. Die topologische Struktur von $\overline{\mathfrak{X}}''$ wurde in Abschnitt 4 angegeben. Man verifiziert direkt, daß $\overline{\mathfrak{X}}$ mit dem Unterraum von $\overline{\mathfrak{X}}''$ identisch ist, den man erhält, wenn man $\overline{X}''$ durch X ersetzt, auf jedem gegen den gemeinsamen Mittelpunkt X konvergierenden Kreise einen festen Punkt auszeichnet und, von ihm ausgehend, auf dem betreffenden Kreis nur rationale Teilungspunkte des Umfanges betrachtet. In diesem Falle ist also $\overline{\mathfrak{X}}$ nicht kompakt, aber dicht in $\overline{\mathfrak{X}}''$.

Schließlich sei $\overline{X}''$ die eindimensionale Torusgruppe wie in Abschnitt 4 und $X = X'$ die Untergruppe der ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mod 1. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ wieder die Beschränkung von $\mathfrak{C}(\overline{X}'')$ auf X, also $\overline{X}''$ eine $\mathfrak{A}$-Kompaktifizierung von X. Identifizieren wir X mit der additiven Gruppe der ganzen Zahlen, dann wird $\mathfrak{A}$ zu dem bezüglich der Norm $\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |$ vervollständigten Vektorraum aller endlichen Linearkombinationen von Funktionen der Form $f^{(n)}(x) = \exp(\pi i \sqrt{2} n x)$ $(x \in X, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Da jede von der Einheits-Untergruppe E verschiedene Untergruppe X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ von X wieder zyklisch und in $\overline{X}''$ dicht ist, besteht $\overline{\mathfrak{X}}$ nur aus den Kongruenzklassen $\overline{E}$ und $\overline{X}$. Dies stimmt mit der Tatsache überein, daß für jede natürliche Zahl k

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{x=1}^{m} \exp(\pi i \sqrt{2} n (kx)) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{x=1}^{m} \exp(\pi i \sqrt{2} (nk)\, x) = \delta_{n0},$$

also $M_k(f) = M(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$ ist. In diesem Falle ist also $\overline{\mathfrak{X}}$ zwar kompakt, aber nicht dicht in $\overline{\mathfrak{X}}''$.

Literatur.

[1] *B. Eckmann*, Über monothetische Gruppen. Comm. math. Helv. **16** (1943), 249—263.
[2] *G. Helmberg*, Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. I. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **207** (1961), 31—52.
[3] *G. Helmberg*, Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. II. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **208** (1961), 1—21.
[4] *J. L. Kelley*, General Topology. New York, 1955.
[5] *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin, 1936.
[6] *G. Noebeling* und *H. Bauer*, Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. Jahresber. d. DMV **58** (1955), 54—72.
[7] *J. G. Wendel*, Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 923—929.

Eingegangen 29. Juni 1960.

Über Durchschnittseigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien[1]).

In memorian Wilhelm Süss.

Von *L. Danzer* in München.

Inhaltsverzeichnis.

1. Einleitung.
2. Bezeichnungsweise.
3. Hilfssätze 1 und 2.
4. Weitere Vorbereitungen.
5. Die Durchmesser des Durchschnitts von q Kugeln im $\mathfrak{E}^p$ (Hilfssatz 3a).
6., 7. Nachweis, daß die Eigenschaft $H'(2;1)$ aus $H'(p+1;p)$ folgt (Hilfssatz 3b).
8. Anwendung auf die p-dimensionalen Ebenen des $\mathfrak{E}^n$ (Satz 1a).
9. Die Eigenschaft $H'(2;m)$ und die Überdeckung der $(m-1)$-Sphäre mit Kugelkappen vom Radius 30° (Hilfssatz 4); die Zahlen K_μ.
10. Anwendung von Nr. 9 auf Satz 1a (Satz 1b).
11.—13. Abschätzung der Zahlen $K_\mu(\varrho)$.
14. Genauere Abschätzungen für K_2, K_3 und K_4; tabellarische Übersicht.
Literaturverzeichnis.

1. Einleitung. L. Fejes Tóth erwähnt in seinem 1953 erschienenen Buch über Lagerungsprobleme [8] im Zusammenhang mit dem Satz von Helly [2] die folgende Vermutung von T. Gallai[2]): Gegeben sei eine Familie **F** abgeschlossener Kreisscheiben $\mathfrak{K}_\iota$ in der euklidischen Ebene mit der Eigenschaft, daß *je* zwei Bereiche aus **F** sich treffen:

$$(0) \qquad \mathfrak{K}_\varkappa \cap \mathfrak{K}_\lambda \neq \emptyset \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_\varkappa, \mathfrak{K}_\lambda \in \mathbf{F};$$

dann lassen sich stets fünf Punkte so angeben, daß jeder Bereich aus **F** mindestens einen dieser Punkte enthält, wofür wir auch sagen wollen: Dann läßt sich **F** *mit fünf Punkten erfassen.*

Zwei Jahre später bewiesen H. Hadwiger und H. Debrunner, daß man sogar mit drei Punkten auskommt, wenn man zusätzlich voraussetzt, alle Kreisscheiben

[1]) Diese Arbeit ist im wesentlichen identisch mit dem ersten Teil der bei der Technischen Hochschule München eingereichten Dissertation des Verfassers: „Über zwei Lagerungsprobleme (Abwandlungen einer Vermutung von T. Gallai)." Der zweite Teil, der sich auf konvexe Bereiche in einer affinen Ebene bezieht, soll demnächst ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

[2]) [8], p. 97; nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Professor Fejes Tóth haben Gallai, Ungár und Szekeres selbst nichts bezüglich dieses Problems publiziert.

aus **F** sollen *gleich* groß sein (cf. [10]). Daß die Zahl drei im allgemeinen Fall zu klein ist, ist schon seit längerer Zeit bekannt. Das erste publizierte Gegenbeispiel findet sich aber wohl erst bei B. Grünbaum [18]; es besteht aus 21 Kreisscheiben, die mit drei Punkten nicht erfaßbar sind. Schließlich veröffentlichte H. Hadwiger das Problem von Gallai in den Elementen der Mathematik [16]. Wie der Verfasser zeigen konnte, ist tatsächlich jede Familie **F**, die (0) erfüllt, mit vier Punkten erfaßbar[3]).

Sehr leicht sieht man ein, daß sich stets *sieben* Punkte mit der genannten Eigenschaft finden lassen. Dieses Ergebnis geht nach Fejes Tóth auf P. Ungár und G. Szekeres zurück[3]). Es genügt nämlich, den Mittelpunkt M_0 einer kleinsten Kreisscheibe aus **F** (Radius r_0) und die Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$ eines regulären Sechsecks mit Zentrum M_0 und der Seitenlänge $r_0\sqrt{3}$ zu nehmen (cf. Hilfssatz 4 für $m = 2$). (Falls es in **F** keine kleinste Scheibe gibt, adjungiere man die kleinste Kreisscheibe $\mathfrak{K}$, die alle $\mathfrak{K}_i \in \mathbf{F}$ trifft. Falls $\mathfrak{K}$ einpunktig ist, ist alles trivial; anderenfalls gilt das eben Gesagte.)

Die Wahl dieser sieben Punkte hängt offenbar nur von der Lage und Größe der *kleinsten* Scheibe in **F** ab (wobei man sogar noch einen Freiheitsgrad der Rotation behält); und wenn man beweisen will, daß sie das Verlangte leisten, so genügt es, an Stelle von (0) vorauszusetzen, es möge für die Radien der Kreisscheiben

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(1a)} & r_i \geqq r_0 \\ \text{gelten, und es sei} & \\ \text{(1b)} & \mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{K}_0 \neq \emptyset \end{array}\right\} \text{für } \mathfrak{K}_i \in \mathbf{F}.$$

Unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen kann die Zahl sieben durch keine kleinere ersetzt werden (cf. Beispiel 1 der in Fußnote 1 angekündigten Arbeit).

Der Beweis, daß jeder Kreisbereich, der $\mathfrak{K}_0$ trifft und nicht kleiner als $\mathfrak{K}_0$ ist, einen der sieben Punkte enthält, ist so einfach, daß es nahe liegt, das Problem auf Familien $\mathbf{F} := [\mathfrak{K}_i]$ von Kugeln im euklidischen $\mathfrak{E}^n$ zu übertragen. An Stelle von (0) wird die Eigenschaft gesetzt, daß *je p* Kugeln aus **F** einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen; wir wollen sie kurz mit $H(p; n)$ bezeichnen ($2 \leqq p \leqq n+1$; der Fall $p = n+1$ ist allerdings von geringerem Interesse, denn hier gilt bereits der Satz von Helly [2]). Der Bedingung (1a, b) entspricht dann die Eigenschaft $H'(p; n)$, daß je $p-1$ Kugeln aus **F** einen nichtleeren Durchschnitt bilden, und daß jede Kugel aus **F** den (dem Durchmesser nach) kleinsten solchen Durchschnitt $\mathfrak{D}_0$ trifft. (Für $p = 2$ geht $H'(p; n)$ in (1a, b) über, mit $\mathfrak{D}_0$ an Stelle von $\mathfrak{K}_0$.) Das hauptsächliche Ergebnis dieser Arbeit liegt nun in Hilfssatz 3b, wonach aus $H'(p+1; p)$ die Existenz einer Geraden g folgt, auf der die Kugeln $\mathfrak{K}_i \in \mathbf{F}$ eine Familie $\mathbf{F}^*$ von Strecken $\mathfrak{K}_i^*$ mit der Eigenschaft $H'(2; 1)$ ausschneiden, wobei $\mathfrak{D}_0^* = \mathfrak{D}_0 \cap g$ ist. Außerdem ist (im wesentlichen auf Grund von Hilfssatz 3a) der Mittelpunkt von $\mathfrak{D}_0^*$ invariant gegenüber Einbettung in Räume höherer Dimension, so daß man sogleich weiterschließen kann: Aus $H'(p+1; n)$ folgt die Existenz einer $(n-p+1)$-dimensionalen Ebene $\mathfrak{E}^{n-p+1}$, aus der **F** eine Familie $\mathbf{F}^*$ mit der Eigenschaft $H'(2; n-p+1)$ ausschneidet. Schließlich folgt aus $H'(2; m)$ fast trivialerweise — nämlich mittels zweidimensionaler Schnittebenen —, daß man die Familie **F** erfassen kann, indem man den Mittelpunkt M_0 von $\mathfrak{D}_0$ benützt und so viele Punkte $P_\varkappa$ auf der $(m-1)$-Sphäre um M_0 mit Radius $r_0\sqrt{3}$ verteilt, daß die den Punkten $P_\varkappa$ umbeschriebenen Kugelkappen vom Radius 30° die $(m-1)$-Sphäre überdecken (Hilfssatz 4). Die hierfür erforderliche Mindestanzahl wollen wir mit K_m bezeichnen. — Zusammengefaßt: Eine Familie

[3]) Der Beweis dieses Satzes (zuerst vorgetragen im mathematischen Kolloquium der Universität München, Dez. 1954) ist jedoch recht kompliziert. Der Verfasser beabsichtigt, ihn an anderer Stelle zu veröffentlichen.

von Kugeln im euklidischen $\mathfrak{E}^n$ mit der Eigenschaft $H'(p+1; n)$ ist mit $1 + K_{n-p+1}$ Punkten erfaßbar (Satz 1b).

In den letzten drei Nummern wird K_m abgeschätzt, und zwar allgemein durch

$$\sqrt{\frac{3\pi m}{2}} \cdot 2^{m-1} \leqq K_m \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}\pi(m+1)^3} \cdot (1+\sqrt{3})^{m-1}$$

(für $m = 4, 5, \ldots$ beziehungsweise für $m = 2, 3, \ldots$), während für $m = 3$ und $m = 4$ schärfere Schranken gegeben werden (die oberen Schranken auf Grund spezieller Überdeckungen der 2-Sphäre und der 3-Sphäre).

Es sei betont, daß dem Verfasser bei den vorliegenden Untersuchungen weniger daran lag, möglichst gute Schranken für die *Gallaische* Aufgabe (Voraussetzung $H(2; n)$) zu finden, als vielmehr den oben erwähnten *Ansatz* von Ungár und Szekeres möglichst weit zu verfolgen. Daß dieser eine Reduktion der Dimensionszahl (bei gleichzeitiger Erniedrigung der Durchschnittsordnung p) gestattet, führt zu Satz 1b; dessen Wert scheint dem Verfasser allein darin zu liegen, daß seine Schranke nur von der *Differenz* $n - p$ abhängt. Hält man nämlich p fest, so kann man — nach dem Vorbilde von Hadwiger und Debrunner in [10] — auf sehr viel einfachere Weise Schranken erhalten, die für große n erheblich kleiner sind als die Zahlen K_{n-p+1}. Merkwürdigerweise scheint es schwierig zu sein, aus der Eigenschaft $H(p; n)$ für festes $p > 2$ und *beliebiges* n irgend welche besseren Schranken abzuleiten, als man schon für $p = 2$ haben kann.

2. Bezeichnungsweise. Im folgenden seien bezeichnet:

eine Gleichheit per definitionem durch $:=$ beziehungsweise durch $=:$, und zwar mit dem Doppelpunkt auf der Seite des zu definierenden Gegenstandes,

Punkte mit großen lateinischen Buchstaben,

die *Gerade* durch A und B mit AB (falls auch der Punkt C auf ihr liegt, sprechen wir unter Umständen von der Geraden ABC),

die abgeschlossene *Strecke* mit den Endpunkten A und B durch $\overline{AB}$, wobei wir den Fall $A = B$ nicht ausschließen,

der *Abstand* des Punktes A vom Punkte B mit $|AB|$,

mit $\mathfrak{E}^n$ *ausschließlich* der *n-dimensionale euklidische Raum* (überhaupt sollen obere Indices stets auf die Dimension hinweisen und nie zur bloßen Numerierung dienen),

mit $\emptyset$ die *leere* Punktmenge (des betreffenden Raumes),

mit $\underline{\mathfrak{A}}$ der *offene Kern*, mit $\overline{\mathfrak{A}}$ die *abgeschlossene Hülle* der Punktmenge $\mathfrak{A}$,

als *Kugeln* abgeschlossene Vollkugeln mit endlichem, nicht notwendig von Null verschiedenem Radius,

der *Mittelpunkt* beziehungsweise der *Radius* einer Kugel $\mathfrak{K}$ stets mit M beziehungsweise mit r (gegebenenfalls mit entsprechendem Index), so daß es beispielsweise überflüssig sein wird, wenn eine Kugel $\hat{\mathfrak{K}}_i$ bereits definiert ist, noch zu sagen, was $\hat{r}_i$ bedeuten soll,

als *Durchmesser* einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ jede Strecke $\overline{AB}$ mit

$$|AB| = d(\mathfrak{A}) := \sup_{X,Y \in \overline{\mathfrak{A}}} |XY|$$

(das Symbol $d(\mathfrak{A})$ bezeichnet also nur den *Betrag* des Durchmessers, nicht seine Lage), für die leere Menge wollen wir noch $d(\emptyset) := 0$ vereinbaren.

Wir sagen: *Die Punktmenge* $\mathfrak{M} := \{P_\varkappa\}$ *erfaßt die Familie* $\mathbf{F} := [\mathfrak{K}_\iota]$ (oder auch: *Die Punkte* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *erfassen* **F**) genau dann, wenn für jeden Bereich $\mathfrak{K}_i \in \mathbf{F}$ der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{K}}_i \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$ ist. Wir sagen: $\mathfrak{M}$ *erfaßt* **F** *im weiteren Sinne* (*i. w. S.*), falls entsprechend $\mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$ gilt. (Gelegentlich werden wir, um den Unterschied zu betonen, statt „erfassen" „erfassen *im engeren Sinne*" (*i. e. S.*) sagen.)

Im folgenden werden hauptsächlich Familien $\mathbf{F} := [\mathfrak{K}_\iota]$ von Kugeln im $\mathfrak{E}^n$ betrachtet mit Eigenschaften vom Typ

(I) je $p-1$ Kugeln aus **F** besitzen mindestens zwei gemeinsame Punkte; und

(II) der dem Durchmesser nach kleinste Durchschnitt $\mathfrak{D}_0$ von $p-1$ Kugeln aus **F** wird noch von jeder Kugel aus **F** getroffen.

Wie wir sehen werden, läßt sich jede solche Familie mit endlich vielen Punkten i. w. S. erfassen. Die kleinste — nur von p und n abhängige — Anzahl von Punkten, die hierfür stets ausreicht, soll mit $N^*(p; n)$ bezeichnet werden. Es ist also $N^*(2; 1) = 2$.

3. Um den Beweis des in der Einleitung erwähnten Satzes 1 durchsichtiger zu gestalten, ziehen wir einige Zwischenbehauptungen als Hilfssätze vor. Den Beweis des entscheidenden Hilfssatzes 3 entlasten wir seinerseits, indem wir ihm die Hilfssätze 1 und 2 vorausschicken.

Hilfssatz 1: *Es seien* $A_0, A_1, \ldots, A_p$ $p+1$ (*nicht notwendig verschiedene*) *Punkte eines affinen Raumes* $\mathfrak{R}^{p-1}$ [4]*, sowie* Z *ein Punkt aus der konvexen Hülle* $\mathfrak{H}$ *der* A_π*; wird dann ein Index* q *vorgegeben, so gibt es stets einen von* q *verschiedenen Index* q' $(0 \leqq q, q' \leqq p)$ *mit der Eigenschaft, daß* Z *schon in der konvexen Hülle der Punkte* A_π *mit* $\pi \neq q'$ *liegt.*

Zum *Beweis*, den wir durch vollständige Induktion nach p führen wollen, nehmen wir zunächst $p \geqq 2$ an und legen durch A_q und Z eine Gerade g, die aus $\mathfrak{H}$ eine Strecke positiver Länge ausschneidet. (Z und A_q dürfen zusammenfallen. Existiert eine solche Gerade g nicht, so ist $A_0 = A_1 = \cdots = A_p$; in diesem Fall ist unsere Behauptung aber trivial.) Z' sei ein von A_q verschiedener Endpunkt dieser Strecke und so gewählt, daß $Z \in \overline{Z' A_q}$ ist [5]. Z' liegt also auf dem Rande von $\mathfrak{H}$, das heißt in einer gewissen Stützhyperebene $\mathfrak{R}^{p-1}$ von $\mathfrak{H}$. Die konvexe Hülle der in $\mathfrak{R}^{p-2}$ gelegenen Punkte A_π enthält Z'. Gibt es nun einen Index $q' \neq q$ mit $A_{q'} \notin \mathfrak{R}^{p-2}$, so liegt nach dem über Z' Gesagten Z in der konvexen Hülle der übrigen A_π, und wir sind fertig. Anderenfalls liegen in $\mathfrak{R}^{p-2}$ die p Punkte A_π mit $\pi \neq q$, und die Behauptung folgt nach Induktionsannahme. Für $p = 1$ ist unser Satz aber offensichtlich richtig.

Den folgenden Hilfssatz werden wir sowohl auf euklidische wie auch auf sphärische Räume anzuwenden haben. Wir wollen ihn deshalb gleich für den Fall beweisen, daß $\mathfrak{R}$ ein beliebiger *metrischer* Raum ist. Außer $\mathfrak{R}$ selbst sollen genau diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{R}$ *konvex* heißen, die Durchschnitte offener Halbräume sind. (Unter einem offenen Halbraum sei hier die Menge aller Punkte verstanden, die einem festen Punkt näher liegen als einem anderen festen Punkt.) Mit diesem Konvexitätsbegriff [6] gilt der

Hilfssatz 2: *Sei* $\mathfrak{R}$ *ein metrischer Raum,* $\mathfrak{M}$ *eine nichtleere Menge von Punkten aus* $\mathfrak{R}$*, sowie* P *ein beliebiger Punkt aus* $\mathfrak{R}$ *und* Z *ein Punkt aus der konvexen Hülle* conv $(\mathfrak{M})$

---

[4]) Die A_π brauchen $\mathfrak{R}^{p-1}$ nicht aufzuspannen.

[5]) Ein(e) solche(r) existiert stets. Im allgemeinen wird er (sie) eindeutig bestimmt sein, doch brauchen wir den gegenteiligen Fall nicht auszuschließen.

[6]) Definiert man die Konvexität anders — etwa mittels kürzester Verbindungen —, so wird dieser Hilfssatz unter Umständen falsch. Z. B. ist er auf der Zylinderfläche, aufgefaßt als euklidische Raumform, schon für drei Kreisscheiben nicht mehr richtig.

von $\mathfrak{M}$; *dann gibt es einen Punkt* M *mit*

$$M \in \mathfrak{M} \text{ und } |PM| \geqq |ZM|.$$

Zum *Beweis* nehmen wir an, die Behauptung sei für ein gewisses Punktepaar $[P, Z]$ falsch. Dann läge die Menge $\mathfrak{M}$ ganz in dem durch $|PM| < |ZM|$ definierten Halbraum $\mathfrak{H}$, und folglich wäre auch $\text{conv}(\mathfrak{M}) < \mathfrak{H}$. Nach Voraussetzung würde nun $Z \in \mathfrak{H}$ und damit $|PZ| < |ZZ| = 0$ folgen. — Widerspruch!

Bemerkung: *Der Hilfssatz 2 ist äquivalent mit der folgenden Aussage: Kugeln (eines metrischen Raumes), die einen nichtleeren Durchschnitt bilden, überdecken die konvexe Hülle ihrer Mittelpunkte.*

Man folgert diese Aussage sofort aus dem Hilfssatz, indem man die Familie der Kugelmittelpunkte mit $\mathfrak{M}$ und mit P einen gemeinsamen Punkt aller Kugeln bezeichnet. — Die Umkehrung erhält man, wenn man jedem $M \in \mathfrak{M}$ die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $|PM|$ zuordnet.

4. Die Hilfssätze 1 und 2 gestatten uns einige nützliche Aussagen über endliche Familien $\mathbf{F} := [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_q]$ p-dimensionaler Kugeln im (euklidischen) $\mathfrak{E}^p$ $(p, q \geqq 1)$. Zunächst ordnen wir jeder solchen Familie durch

$$(2) \quad \begin{cases} f(Z, \mathbf{F}) := f(Z;\ \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_q) \\ \qquad := \min\,[r_1^2 - |ZM_1|^2, r_2^2 - |ZM_2|^2, \ldots, r_q^2 - |ZM_q|^2] \end{cases}$$

eine eindeutige reellwertige Funktion zu; sie ist (bei fest gegebener Familie $\mathbf{F}$) eine im ganzen Raum $\mathfrak{E}^p$ definierte, stetige und nach oben beschränkte Funktion von Z, die im Unendlichen den Grenzwert $-\infty$ besitzt. Überdies ist sie konkav, denn wenn Z Mittelpunkt der Strecke $\overline{XY}$ ist, so hat man (in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit Z als Ursprung, X als Einheitspunkt auf der x_1-Achse und $M_\iota =: (m_{1\iota}, m_{2\iota}, \ldots, m_{p\iota})$, $\iota = 1, 2, \ldots, q$):

$$\begin{aligned} f(Z, \mathbf{F}) &= \min_{\iota=1,\ldots,q}\left[r_\iota^2 - m_{1\iota}^2 - \sum_{\pi=2}^{p} m_{\pi\iota}^2\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2}\min_{\iota}\left[r_\iota^2 - (m_{1\iota}-1)^2 - \sum_{\pi=2}^{p} m_{\pi\iota}^2 + r_\iota^2 - (m_{1\iota}+1)^2 - \sum_{\pi=2}^{p} m_{\pi\iota}^2\right] \\ &\geqq 1 + \frac{1}{2}\left(f(X, \mathbf{F}) + f(Y, \mathbf{F})\right). \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \textit{Es gibt demnach genau einen Punkt } Z_0(\mathbf{F}), \textit{ an dem die Funktion } f(Z, \mathbf{F}) \\ \textit{ihre obere Grenze } G_0(\mathbf{F}) \textit{ annimmt.} \end{cases}$$

Definitionsgemäß ist also

$$(4) \qquad G_0(\mathbf{F}) = f(Z_0(\mathbf{F}), \mathbf{F}) \leqq r_\iota^2 - |Z_0(\mathbf{F})\, M_\iota|^2 \quad \text{für} \quad \iota = 1, 2, \ldots, q,$$

wobei nicht für alle ι das Kleinerzeichen gelten kann.

$$(5) \quad \begin{cases} \text{Wir wollen die Familie derjenigen Kugeln aus } \mathbf{F}, \text{ für die in (4) Gleich-} \\ \text{heit besteht, mit } \tilde{\mathbf{F}}, \text{ die Familie der zugehörigen Mittelpunkte mit } \tilde{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}) \text{ und} \\ \text{deren konvexe Hülle mit } \tilde{\mathfrak{H}}(\mathbf{F}) \text{ bezeichnen; offenbar ist } \mathbf{F} > \tilde{\mathbf{F}} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Man sieht nun leicht, daß

$$(6) \qquad Z_0(\mathbf{F}) \in \tilde{\mathfrak{H}}(\mathbf{F})$$

ist. Anderenfalls gäbe es nämlich eine Hyperebene $\mathfrak{E}^{p-1}$, die $\tilde{\mathfrak{H}}$ von Z_0 trennte. Sei F der Fußpunkt des Lotes von Z_0 auf $\mathfrak{E}^{p-1}$, so würde für jeden inneren Punkt P der Strecke $\overline{FZ_0}$

$$r_i^2 - |PM_i|^2 > r_i^2 - |Z_0 M_i|^2 = f(Z_0, \mathfrak{F}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_i \in \tilde{\mathfrak{F}}$$

gelten. Nach Definition von $\tilde{\mathfrak{F}}$ gilt außerdem, sobald P genügend nahe bei Z_0 liegt,

$$r_i^2 - |PM_i|^2 > f(Z_0, \mathfrak{F}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_i \in \mathfrak{F} - \tilde{\mathfrak{F}};$$

wir hätten also schließlich

$$f(P, \mathfrak{F}) > f(Z_0, \mathfrak{F}),$$

entgegen (3), womit (6) bewiesen ist.

Aus (6) (und (2)) ergibt sich nebenbei die folgende, für später wichtige Invarianz von $Z_0(\mathfrak{F})$ und $G_0(\mathfrak{F})$:

(7) *Sei $\mathfrak{E}^{p^*}$ ein beliebiger Unterraum von $\mathfrak{E}^p$, der die Mittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_q$ sämtlich enthält, und* $\mathfrak{F}^* := [\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{E}^{p^*}, \mathfrak{K}_2 \cap \mathfrak{E}^{p^*}, \ldots, \mathfrak{K}_q \cap \mathfrak{E}^{p^*}]$; *dann ist*

$$Z_0(\mathfrak{F}^*) = Z_0(\mathfrak{F})$$

und folglich auch

$$G_0(\mathfrak{F}^*) = G_0(\mathfrak{F}).$$

Nehmen wir nunmehr an, es sei $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} < \tilde{\mathfrak{F}}$, $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ die Familie der zugehörigen Mittelpunkte, $\underset{\sim}{\mathfrak{H}}$ die konvexe Hülle von $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ und es sei

$$Z_0(\mathfrak{F}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{H}}.$$

Dann folgt

(8) und

$$Z_0(\underset{\sim}{\mathfrak{F}}) = Z_0(\mathfrak{F})$$

$$G_0(\underset{\sim}{\mathfrak{F}}) = G_0(\mathfrak{F}).$$

Einerseits ist nämlich wegen $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} < \mathfrak{F}$

(9) also

$$f(Z, \underset{\sim}{\mathfrak{F}}) \geqq f(Z, \mathfrak{F}) \quad \text{für } \textit{jeden} \text{ Punkt } Z,$$

$$G_0(\underset{\sim}{\mathfrak{F}}) \geqq G_0(\mathfrak{F}).$$

Andererseits ist auf $Z_0(\mathfrak{F})$ und $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ Hilfssatz 2 anwendbar. Es gibt also zu jedem Punkt $P \in \mathfrak{E}^p$ einen Punkt $M \in \underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ mit $|PM| \geqq |Z_0(\mathfrak{F})\, M|$. Nach Definition von $\underset{\sim}{\mathfrak{M}}$ gibt es nun eine[5]) Kugel $\mathfrak{K}_i \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}$ mit $M_i = M$, und es folgt

$$\begin{aligned} f(P, \underset{\sim}{\mathfrak{F}}) &\leqq r_i^2 - |PM_i|^2 \leqq r_i^2 - |Z_0(\mathfrak{F})\, M_i|^2 \\ &= f(Z_0(\mathfrak{F}), \mathfrak{F}) \qquad (\text{wegen } \mathfrak{K}_i \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}} < \tilde{\mathfrak{F}}) \\ &= G_0(\mathfrak{F}), \end{aligned}$$

woraus in Verbindung mit (9) die Behauptung (8) folgt (Anwendung von (3) auf $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$).

5. Hilfssatz 3a: *Sei $p \geqq q \geqq 1$, $p \geqq 2$, sowie $\mathfrak{F} := [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_q]$ eine Familie p-dimensionaler Kugeln im $\mathfrak{E}^p$; ihr Durchschnitt sei*

(10) $$\mathfrak{D} := \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_q \neq \emptyset;$$

dann gilt (mit den Bezeichnungen aus Nr. 4):

(11) $\quad Z_0(\mathbf{F})$ *ist Mittelpunkt jedes Durchmessers von* $\mathfrak{D}$,

(12) $\quad (d(\mathfrak{D}))^2 = 4G_0(\mathbf{F})$,

und

(13) $\quad$ *ist* $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ *eine*[5]) *Hyperebene des* $\mathfrak{E}^p$, *welche die Mittelpunkte* $M_1, M_2, \ldots, M_q$ *sämtlich enthält, sowie* g_0 *die in* $Z_0(\mathbf{F})$ *auf* $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ *errichtete Senkrechte, so ist die Strecke* $\overline{XY} := g_0 \cap \mathfrak{D}$ *ein Durchmesser von* $\mathfrak{D}$.

Beweis: Sei $\overline{AB}$ ein beliebiger Durchmesser von $\mathfrak{D}$ und C sein Mittelpunkt. Wir betrachten die Orthogonale l durch C auf $\mathfrak{E}_0^{p-1}$; sie möge aus $\mathfrak{D}$ die Strecke $\overline{DE}$ ausschneiden. Der Punkt D liegt also auf dem Rande mindestens einer Kugel $\mathfrak{K}_i$ aus $\mathbf{F}$, und wegen der Symmetrie bezüglich $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ liegt auch E auf dem Rande von $\mathfrak{K}_i$. Es folgt (cf. Fig. 1; alle auftretenden Punkte liegen auf zwei sich schneidenden Geraden, also in einer zweidimensionalen Ebene):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}|AB|^2 &= |AC| \cdot |BC| \\ &\leqq |A^*C| \cdot |B^*C| \qquad (\mathfrak{D} < \mathfrak{K}_i) \\ &= |DC| \cdot |EC| \qquad \text{(Sehnensatz)}^7) \\ &\leqq \frac{1}{4}|DE|^2.\end{aligned}$$

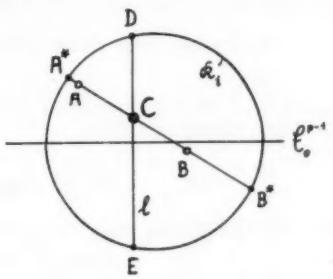

Fig. 1.

Weil $\overline{AB}$ ein Durchmesser von $\mathfrak{D}$ sein sollte, folgt Gleichheit; und diese kann nur bestehen, wenn C auch Mittelpunkt von $\overline{DE}$ ist. Das heißt, es ist C der Schnittpunkt von DE und $\mathfrak{E}_0^{p-1}$, und dies bedeutet gerade

(14) $$\begin{aligned}\frac{1}{4}(d(\mathfrak{D}))^2 = \frac{1}{4}|DE|^2 &= |DC|^2 \\ &= f(C, \mathbf{F}) \qquad \text{(cf. Def. von } f(\ldots) \text{ in (2))} \\ &\leqq G_0(\mathbf{F}).\end{aligned}$$

Nachdem wir nun wissen, daß $G_0(\mathbf{F})$ nicht negativ ist, (aus (10) folgt die Existenz eines Durchmessers von $\mathfrak{D}$, und aus dieser wurde (14) gefolgert), ergibt sich unmittelbar die Ausführbarkeit der Konstruktion (13) von g_0, und wir haben

(15) $$\begin{aligned}G_0(\mathbf{F}) &= (f_0(\mathbf{F}), \mathbf{F}) \\ &= |XZ_0(\mathbf{F})|^2 \qquad \text{(cf. (2))} \\ &= \frac{1}{4}|XY|^2 \qquad \text{(Symmetrie bezüglich } \mathfrak{E}_0^{p-1}) \\ &\leqq \frac{1}{4}(d(\mathfrak{D}))^2 \qquad (X, Y \in \mathfrak{D}).\end{aligned}$$

Kombiniert man dies mit (14), so erkennt man, daß hier wie dort Gleichheit besteht. Aus (15) wird so ein gemeinsamer Beweis für (12) und (13), während aus (14) (wegen (3)) jetzt $C = Z_0(\mathbf{F})$ und damit (11) folgt, w. z. b. w.

---

[7]) Es sei darauf hingewiesen, daß an dieser Stelle die Kugelgestalt von $\mathfrak{K}_i$ wesentlich benützt wird.

6. Hilfssatz 3b: *Es ist* $N^*(p+1;p) \leqq N^*(2;1)$. *Etwas schärfer und im einzelnen: Sei* $p \geqq 2$ *und* $\mathsf{F}_0 := [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p]$ *eine Familie p-dimensionaler Kugeln im* $\mathfrak{E}^p$; *ihr Durchschnitt sei*

$$\mathfrak{D}_0 := \bigcap_{\pi=1}^{p} \mathfrak{K}_\pi \neq \emptyset; \tag{16}$$

$\mathfrak{E}_0^{p-1}$ *sei eine*[5]) *Hyperebene des* $\mathfrak{E}^p$, *welche die Mittelpunkte* $M_1, M_2, \ldots, M_p$ *sämtlich enthält; ferner sei* Z_0 *der gemeinsame Mittelpunkt der Durchmesser von* $\mathfrak{D}_0$ (*cf. Hilfssatz* 3a *für* $q = p$), *sowie* g_0 *das Lot in* Z_0 *auf* $\mathfrak{E}_0^{p-1}$.

(17) { *Ist dann* $\mathfrak{K}_0$ *eine weitere*[8]) *p-dimensionale Kugel im* $\mathfrak{E}^p$, *die mit je* $p-1$ *Kugeln aus* F_0 *einen nichtleeren Durchschnitt bildet, dessen Durchmesser nicht kleiner ist als* $d(\mathfrak{D}_0)$,

so ist — mit $\overline{XY} := \mathfrak{D}_0 \cap g_0$ *und* $s := \mathfrak{K}_0 \cap g_0$ —

$$s \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad |s| \geqq |XY| = d(\mathfrak{D}_0). \tag{1'a}$$

Außerdem folgt dann aus

$$\mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{D}_0 \neq \emptyset \tag{18}$$

in Verbindung mit (17)

$$s \cap \overline{XY} \neq \emptyset. \tag{1'b}$$

Zusatz:

(19) { *Liegt* Z_0 *speziell in der konvexen Hülle von weniger als p Punkten aus* $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathsf{F}_0)$ (*cf.* (5)),

so folgt schon aus (17)

$$Z_0 \in \mathfrak{K}_0 \tag{20}$$

(*und damit trivialerweise* (18) *und* (1'b));

(21) { *die Zusatzvoraussetzung* (19) *ist insbesondere erfüllt, wenn* $\tilde{\mathsf{F}}_0$ *echte Teilfamilie von* F_0 *ist, beziehungsweise wenn die Punkte* $M_1, \ldots, M_p$ *linear abhängig sind*[9]).

Beweis: Wie wir bereits wissen (cf. (6)), liegt Z_0 in der konvexen Hülle der Familie $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathsf{F}_0)$. Die Voraussetzung (19) ist also trivialerweise erfüllt, wenn $\tilde{\mathsf{F}}_0$ weniger als p Kugeln enthält. Ist dagegen $\tilde{\mathsf{F}}_0 = \mathsf{F}_0$, also $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathsf{F}_0) = [M_1, \ldots, M_p]$, und sind diese Punkte linear abhängig, so können wir auf Z_0 einerseits und die konvexe Hülle von $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathsf{F}_0)$ andererseits unseren Hilfssatz 1 anwenden und sehen, daß auch in diesem Fall Z_0 in der konvexen Hülle von nur $p-1$ Punkten aus $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathsf{F}_0)$ liegt. Damit ist der Zusatz (21) unseres Hilfssatzes bewiesen. — Ehe wir uns ihm selbst zuwenden, erledigen wir den

Fall 1: *Es gilt* (19).

Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, Z_0 liege in der konvexen Hülle $\mathfrak{H}$ der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_q$, es sei $\underset{\sim}{\mathsf{F}}_0 := [\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_q] \prec \tilde{\mathsf{F}}_0$, und es sei $1 \leqq q \leqq p-1$.

[8]) $\mathfrak{K}_0$ darf mit einer oder mit mehreren Kugeln aus F_0 zusammenfallen; jede von diesen erfüllt sogar trivialerweise sowohl die über $\mathfrak{K}_0$ folgenden Voraussetzungen, wie auch die Behauptungen (einschließlich Zusatz).

[9]) Es gibt aber auch andere Fälle, in denen (19) erfüllt ist. Beispiel: $p = 2$, $\mathfrak{K}_1 \equiv x^2 + y^2 \leqq 9$, $\mathfrak{K}_2 \equiv (x-4)^2 + y^2 \leqq 25$. Hier ist $Z_0 = M_1$, aber trotzdem $\tilde{\mathsf{F}}_0 = \mathsf{F}_0$.

Dann betrachten wir neben $\mathfrak{D}_0$ noch den Durchschnitt

$$\underset{\sim}{\mathfrak{D}}_0 := \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_q$$

und haben

(22) $$Z_0(\underset{\sim}{\mathbf{F}}_0) = Z_0 \qquad \text{(nach (8))}$$

und

$$d(\underset{\sim}{\mathfrak{D}}_0) = d(\mathfrak{D}_0) \quad \text{(nach (8) und HS 3a (12))},$$

so daß wir schreiben können:

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{K}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{p-1}) &\geqq d(\mathfrak{D}_0) && \text{(Vor. (17))} \\ &= d(\underset{\sim}{\mathfrak{D}}_0) \\ &\geqq d(\mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{K}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_q \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{p-1}) && (q \leqq p-1)\,[10]). \end{aligned}$$

Es besteht also Gleichheit, woraus folgt, daß $\mathfrak{K}_0$ mindestens einen Durchmesser von $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}_0$ und damit den Punkt $Z_0(\underset{\sim}{\mathbf{F}}_0)$ enthält (cf. Hilfssatz 3a (11)). Mit Rücksicht auf (22) ist dies das, w. z. b. w.

Fall 2: *Der Spezialfall* (19) *liegt nicht vor.*

Dann ist nach dem bereits Bewiesenen $\widetilde{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{F}_0$, und das bedeutet nach Konstruktion der Strecke $\overline{XY}$ (cf. (5)):

(23) *X und Y liegen auf dem Rand jeder der Kugeln* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p$.

Weil der Mittelpunkt Z_0 von $\overline{XY}$ in $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ liegt, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch annehmen,

(24) X und M_0 werden durch $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ nicht getrennt.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, erstens aus (16) und (17) die Behauptung (1' a) und zweitens unter Hinzunahme von (18) die Behauptung (1' b) abzuleiten.

7. Beweise zu (1' a, b). a) Wir betrachten neben der Kugel $\mathfrak{K}_0$ noch diejenige Kugel $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}_0$, die aus ihr durch Verschiebung parallel zu g_0 hervorgeht, und deren Mittelpunkt $\underset{\sim}{M}_0$ in $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ liegt. Es ist also

$$|s| = d(\mathfrak{K}_0 \cap g_0) = d(\underset{\sim}{\mathfrak{K}}_0 \cap g_0).$$

Auf die Punkte $\underset{\sim}{M}_0, M_1, \ldots, M_p$ einerseits und Z_0 andererseits, sowie Null als vorgegebenen Index ist nun Hilfssatz 1 anwendbar (cf. (6)). Wir dürfen deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen,

(25) es liege Z_0 in der konvexen Hülle der Punkte $\underset{\sim}{M}_0, M_1, \ldots, M_{p-1}$.

Zur Abkürzung setzen wir noch $\mathbf{F}_p := [\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{p-1}]$, $Z_p := Z_0(\mathbf{F}_p)$ und bezeichnen mit $\underset{\sim}{Z}_p$ den Fußpunkt des Lotes von Z_p auf $\mathfrak{E}_0^{p-1}$; so bekommen wir (Fig. 2)

$|Z_0 M_\iota| \geqq |Z_p M_\iota| \geqq |\underset{\sim}{Z}_p M_\iota|$ für $\iota = 1, 2, \ldots, p-1$ (orthogonale Projektion)[7]).

Für diese Indices ist nämlich

$$\begin{aligned} r_\iota^2 - |Z_0 M_\iota|^2 &= G_0(\mathbf{F}_0) && \text{(nach (23))} \\ &\leqq G_0(\mathbf{F}_p) && \text{(Vor. (17), HS 3a (12))} \\ &\leqq r_\iota^2 - |Z_p M_\iota|^2. \end{aligned}$$

---

[10]) Ist $d(\mathfrak{D}_0) = 0$, so ist diese Ungleichungskette zu ersetzen durch

$$\{Z_0\} = \mathfrak{D}_0 = \underset{\sim}{\mathfrak{D}}_0 \supset \mathfrak{K}_0 \cap \mathfrak{K}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{p-1} \neq \emptyset \text{ (cf. (17))},$$

woraus ebenfalls $Z_0 \in \mathfrak{K}_0$ folgt.

Nunmehr folgt nach Hilfssatz 2 (mit $\underset{\sim}{Z}_p$ statt P) aus (25)

(26) $$|Z_0\underset{\sim}{M}_0| \leqq |\underset{\sim}{Z}_p\underset{\sim}{M}_0|$$

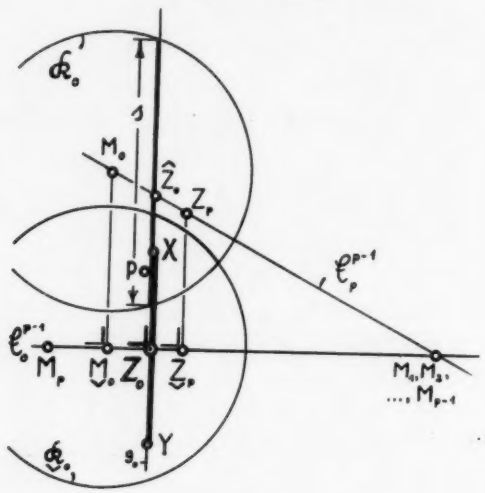

Fig. 2

und hieraus

$$\begin{aligned} r_0^2 - |Z_0\underset{\sim}{M}_0|^2 &\geqq r_0^2 - |\underset{\sim}{Z}_p\underset{\sim}{M}_0|^2 \\ &\geqq r_0^2 - |Z_pM_0|^2 \quad \text{(orthogonale Projektion)} \\ &\geqq G_0(\mathbf{F}_p) \\ &\geqq G_0(\mathbf{F}_0) \quad \text{(Vor. (17))} \\ &= \frac{1}{4}|XY|^2 \geqq 0 \quad \text{(Hilfssatz 3a);} \end{aligned}$$

dies bedeutet aber genau

(1' a) $$s \neq \emptyset \text{ und } |s| \geqq |XY|, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

b) Nach Fallvoraussetzung ist Z_0 linear unabhängig von den Punkten $M_1, \ldots, M_{p-1}$ (anderenfalls würde mittels (6) und Hilfssatz 1 folgen, daß auch M_p von $M_1, \ldots, M_{p-1}$ linear abhinge; das kann aber nach (21) nicht sein). Auf Grund der Annahme (25) folgt, daß auch $\underset{\sim}{M}_0$ linear unabhängig von $M_1, \ldots, M_{p-1}$ ist. Die durch die Punkte $M_0, M_1, \ldots, M_{p-1}$ bestimmte Hyperebene $\mathfrak{E}_p^{p-1}$ ist also gewiß nicht orthogonal zu $\mathfrak{E}_0^{p-1}$. — Wir führen nun den Beweis von (1' b) ganz ähnlich wie den von (1' a), nur ziehen wir jetzt statt $\underset{\sim}{Z}_p$ den Schnittpunkt $\hat{Z}_0$ von g_0 mit $\mathfrak{E}_p^{p-1}$ heran (Fig. 2).

Durch Projektion parallel zu g_0 ergibt sich aus (25), daß

(27) $\hat{Z}_0$ in der konvexen Hülle der Punkte $M_0, M_1, \ldots, M_{p-1}$ liegt,

und aus (26)

$$|\hat{Z}_0M_0| \leqq |Z_pM_0| \leqq r_0 \qquad \text{(Vor. (17))},$$

das heißt: $\hat{Z}_0 \in \mathfrak{K}_0$. Demnach ist (1' b) sicher erfüllt, wenn $\hat{Z}_0 \in \overline{XY}$ ist. Im entgegengesetzten Fall, den allein wir noch zu betrachten haben, ist wegen (24) $X \in Z_0\hat{Z}_0$. Es

folgt (wegen (6) und (27)), daß

(28) X in der konvexen Hülle der Punkte $M_0, M_1, \ldots, M_p$ liegt.

Endlich gibt es nach Voraussetzung (18) einen Punkt P mit

$$|PM_\iota| \leqq r_\iota \qquad \text{für } \iota = 0, 1, \ldots, p.$$

Kombiniert man dies mit (23), so folgt

(29) $$|PM_\iota| \leqq |XM_\iota| \qquad \text{für } \iota = 1, 2, \ldots, p.$$

Nunmehr ist wieder Hilfssatz 2 anwendbar und liefert

$$|PM_0| \geqq |XM_0| \qquad ((28), (29)),$$

woraus wegen der Bedeutung von P unmittelbar $X \in \mathfrak{K}_0$ folgt, w. z. b. w.

8. Eine einfache Anwendung des Hilfssatzes 3b auf die p-dimensionalen Ebenen im $\mathfrak{E}^n$ ist der

Satz 1a: *Es ist* $N^*(p+1; n) \leqq N^*(2; n-p+1)$. *Etwas schärfer und im einzelnen: Sei* $\mathbf{F}_0 := [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p]$ *eine Familie n-dimensionaler Kugeln im euklidischen* $\mathfrak{E}^n$

(30) *und* $n \geqq p \geqq 2$; *ihr Durchschnitt sei*

$$\mathfrak{D}_0 := \bigcap_{\pi=1}^{p} \mathfrak{K}_\pi \neq \emptyset;$$

sei ferner $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ *eine*[5] $(p-1)$*-dimensionale Ebene des* $\mathfrak{E}^n$, *welche die Mittelpunkte* $M_1, M_2, \ldots, M_p$ *sämtlich enthält,* $Z_0 \in \mathfrak{E}_0^{p-1}$ *der gemeinsame Mittelpunkt der Durchmesser von* $\mathfrak{D}_0$ (*cf. Hilfssatz* 3a *für* $q = p$), *sowie* $\mathfrak{E}_0^{n-p+1}$ *das orthogonale Komplement zu* $\mathfrak{E}_0^{p-1}$ *in* Z_0.

(17′) *Dann gilt für jede n-dimensionale Kugel* $\mathfrak{K}$ *im* $\mathfrak{E}^n$, *die mit je* $p-1$ *Kugeln aus* $\mathbf{F}_0$ *einen nichtleeren Durchschnitt bildet, dessen Durchmesser nicht kleiner ist als* $d(\mathfrak{D}_0)$:

(1″a) $$\mathfrak{K}^* \neq \emptyset \text{ und } d(\mathfrak{K}^*) \geqq d(\mathfrak{K}_0^*) = d(\mathfrak{D}_0)$$

mit $\mathfrak{K}_0^* := \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E}_0^{n-p+1}$ *und* $\mathfrak{K}^* := \mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}_0^{n-p+1}$.

Erfüllt $\mathfrak{K}$ *außer* (17′) *auch noch die Bedingung*

(18′) $$\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}_0 \neq \emptyset,$$

so ist auch

(1″b) $$\mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{K}_0^* \neq \emptyset.$$

Der Zusatz von Hilfssatz 3b *ist wörtlich zu übertragen (lediglich ist in* (20) $\mathfrak{K}_0$ *durch* $\mathfrak{K}$ *zu ersetzen).*

Beweis: Sei $\mathfrak{E}^p$ eine[5] Ebene durch M und $\mathfrak{E}_0^{p-1}$. Dann übertragen sich alle Voraussetzungen und Behauptungen von den Kugeln im $\mathfrak{E}^n$ auf die Schnittkugeln im $\mathfrak{E}^p$. Die auftretenden Durchmesser ändern dabei ihre Länge nicht (cf. (7)). — Damit ist unser Satz auf den Hilfssatz 3b zurückgeführt.

9. Mit Satz 1a ist unser erstes Ziel erreicht: Von der schlecht zu handhabenden Voraussetzung, daß gewisse $(p+1)$-tupel von Kugeln im $\mathfrak{E}^n$ nichtleere Durchschnitte besitzen sollen ((18′)), können wir jetzt zu der einfacheren ((1″a, b)) übergehen: In der Familie $\mathbf{F}^*$ der als $\mathfrak{K}^*$ auftretenden Kugeln soll jede die kleinste — nämlich $\mathfrak{K}_0^*$ — treffen.

Die Frage, wie viele Punkte man benötigt, um $\mathbf{F}^*$ zu erfassen, ist nun äquivalent mit der einfachen Aufgabe, die $(m-1)$-Sphäre möglichst sparsam mit Kappen vom sphärischen Radius 30° zu überdecken;

(31) { die *kleinste* Anzahl solcher Kappen, die zur Überdeckung der $(m-1)$-Sphäre ausreicht, sei mit K_m bezeichnet; außerdem sei $K_1 := 1$.

Dann gilt der

Hilfssatz 4: *Es ist* $N^*(2; m) = 1 + K_m$.

Etwas schärfer und im einzelnen:

Gegeben sei eine m-dimensionale Kugel $\mathfrak{K}_0$ *im* $\mathfrak{E}^m$, *es sei* $r_0 > 0$ *und* $m \geqq 2$.

a) *Bilden die Kugelkappen vom Radius* 30° *mit den (sphärischen) Mittelpunkten* $P_1, P_2, \ldots, P_K$ *eine Überdeckung der* $(m-1)$*-Sphäre mit Mittelpunkt* M_0 *und Radius* $r_0\sqrt{3}$, *so enthält jede Kugel* $\mathfrak{K}$ *im* $\mathfrak{E}^m$ *mit*

(1a, b) $$r \geqq r_0 \text{ und } \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_0 \neq \emptyset$$

mindestens einen der Punkte $P_\varkappa$ *oder* M_0.

b) *Wird die Familie* $\mathbf{F}$ *aller Kugeln, die* (1a, b) *erfüllen, von endlich vielen Punkten* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$ *i. w. S. erfaßt, und ist* X_0 *ein beliebiger von* M_0 *verschiedener Punkt des* $\mathfrak{E}^m$, *so liegt in dem Bereich aller Punkte* X *mit*

(32) $$|XM_0| > r_0, \ \sphericalangle XM_0X_0 \leqq 30°$$

mindestens einer der Punkte Q_λ.

c) *Aus* b) *folgt unmittelbar:* $\mathbf{F}$ *kann nicht mit weniger als* $1 + K_m$ *Punkten i. w. S.*[11]) *erfaßt werden.*

Beweis: **a)** Zunächst dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei

(33) $$r = r_0.$$

(Sonst könnten wir nämlich von $\mathfrak{K}$ zu einer Kugel $\tilde{\mathfrak{K}} < \mathfrak{K}$ übergehen, die aus $\mathfrak{K}$ durch Verkleinerung mit einem Ähnlichkeitszentrum $Z \in \mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}_0$ hervorgeht und ebenso groß wie $\mathfrak{K}_0$ ist.)

Falls $M_0 \in \mathfrak{K}$ ist, sind wir fertig. Anderenfalls ist wegen (1b) und (33)

(34) $$r_0 \leqq |MM_0| \leqq 2r_0;$$

ferner dürfen wir nach Voraussetzung ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei

(35) $$\sphericalangle MM_0P_1 \leqq 30°,$$

und haben nach dem Cosinussatz

$$\begin{aligned} |MP_1|^2 &= |M_0P_1|^2 - 2|M_0P_1| \cdot |MM_0| \cos(\sphericalangle MM_0P_1) + |MM_0|^2 \\ &= 3r_0^2 - 2\sqrt{3}r_0|MM_0| \cos(\sphericalangle MM_0P_1) + |MM_0|^2 \quad \text{(wegen (31))} \\ &\leqq 3r_0^2 - 3r_0|MM_0| + |MM_0|^2 \quad \text{(nach (35))} \\ &= r_0^2 - (|MM_0| - r_0)(2r_0 - |MM_0|) \\ &\leqq r_0^2 \quad \text{(wegen (34))}, \end{aligned}$$

[11]) Falls die $(m-1)$-Sphäre auch mit K_m *offenen* Kappen vom Radius 30° überdeckt werden kann, läßt sich $\mathbf{F}$ mit $1 + K_m$ Punkten sogar i. e. S. erfassen. Man kann vermuten, daß hierfür im allgemeinen jedenfalls $2 + K_m$ Punkte ausreichen.

also

$$P_1 \in \mathfrak{K}.$$

b) Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann ist nicht nur der Bereich (32) frei von Punkten Q_λ, sondern, weil dies nach Voraussetzung nur endlich viele sind, jeder Bereich $\mathfrak{B}(X_1)$, der definiert wird durch

$$|XM_0| > r_0, \quad \sphericalangle XMX_1 \leqq 30^0,$$

falls nur $\sphericalangle X_1M_0X_0$ klein genug ist. Wir betrachten nun die Kugel $\mathfrak{K}(X_1)$ mit Radius r_0 und Mittelpunkt M_1 auf dem Strahl $\overrightarrow{M_0X_1}$, im Abstand $2r_0$ von M_0. Sie erfüllt (1a, b), wird also nach Voraussetzung von den Punkten Q_λ erfaßt. Da sie bis auf ihren Berührungspunkt $B(X_1)$ mit $\mathfrak{K}_0$ ganz in $\mathfrak{B}(X_1)$ liegt, folgt, daß $B(X_1)$ einer der Punkte Q_λ ist. Demnach müßten die Q_λ eine volle sphärische Umgebung von $B(X_0)$ ausfüllen, im Widerspruch zur Endlichkeit ihrer Anzahl.

c) Mit dem Beweis von b) ist gezeigt, daß man, allein um die Berührkugeln von $\mathfrak{K}_0$ i. w. S. zu erfassen, schon K_m Punkte außerhalb von $\mathfrak{K}_0$ benötigt. Da $\mathfrak{K}_0$ selbst auch zu $\mathbf{F}$ gehört, benötigt man also insgesamt mindestens $1 + K_m$ Punkte, w. z. b. w.

10. Aus den Ergebnissen von Nr. 8 und Nr. 9 (das heißt, durch Kombination von Satz 1a mit Hilfssatz 4) folgt nun unmittelbar der

Satz 1b: *Es ist* $N^*(p+1; n) \leqq 1 + K_{n-p+1}$.

Etwas schärfer und im einzelnen:

Gegeben sei eine Familie $\mathbf{F}_0 := [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p]$ *n-dimensionaler Kugeln im euklidischen* $\mathfrak{E}^n$, *die den Voraussetzungen* (30) *des Satzes* 1a *genüge, sowie eine Familie* $\mathbf{F}$ *weiterer*[12]) *n-dimensionaler Kugeln im* $\mathfrak{E}^n$, *deren jede (für* $\mathfrak{K}$ *eingesetzt) die Bedingungen* (17′) *und* (18′) *erfüllen möge;*

dann kann man die Familie $\mathbf{F}$ *dadurch mit* $1 + K_{n-p+1}$[13]) *Punkten* $P_\varkappa$ *im weiteren Sinne erfassen, daß man für* P_0 *den Mittelpunkt* Z_0 *von* $\mathfrak{K}_0^*$ *wählt*[13]) *und die übrigen Punkte gemäß Hilfssatz* 4a ($m = n - p + 1$) *auf der* $(n-p)$*-Sphäre im* $\mathfrak{E}_0^{n-p+1}$ *mit dem Mittelpunkt* P_0 *und dem Radius* $r_0\sqrt{3}$ *verteilt*[14]).

Es ist im allgemeinen nicht möglich, $\mathbf{F}$ *mit weniger als* $1 + K_{n-p+1}$ *Punkten im weiteren Sinne zu erfassen.*

Zusatz: *Liegt* Z_0 *in der konvexen Hülle von weniger als p Punkten aus* $\tilde{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}_0)$[13]), *so erfaßt bereits* Z_0 *allein die ganze Familie* $\mathbf{F}$ *i. w. S. (falls* $\mathfrak{K}_0^*$ *mehr als einen Punkt besitzt, sogar i. e. S.).*

Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\tilde{\mathbf{F}}_0$ *echte Teilfamilie von* $\mathbf{F}_0$ *ist*[13]), *beziehungsweise wenn die Punkte* $M_1, M_2, \ldots, M_p$ *linear abhängig sind.*

Korollar zu Satz 1: *Sei* $n \geqq p \geqq 1$, *sowie* $\mathbf{F}$ *eine Familie n-dimensionaler Kugeln im* $\mathfrak{E}^n$, *von denen je* $p+1$ *einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen; dann ist* $\mathbf{F}$ *mit* $1 + K_{n-p+1}$ *Punkten im weiteren Sinne erfaßbar.*

Beweis des Korollars.

Fall 1: *Unter den Durchschnitten von höchstens p Kugeln aus* $\mathbf{F}$ *gibt es einen solchen von minimalem Durchmesser.*

---

[12]) Für die Kugeln aus $\mathbf{F} \cap \mathbf{F}_0$ gilt Fußnote 8 sinngemäß.

[13]) Wegen der Definitionen cf. (31) für K_m, (3) für $Z_0 = Z_0(\mathbf{F}_0)$, Satz 1a für $\mathfrak{K}_0^*$ und $\mathfrak{E}_0^{n-p+1}$, sowie (5) für $\tilde{\mathbf{F}}_0$ beziehungsweise für $\tilde{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}_0)$.

[14]) Im Falle $p = n$ sind statt dessen die beiden Endpunkte der Strecke $\mathfrak{K}_0^*$ zu nehmen.

Dann ist im Falle $p = 1$ unser Korollar in Hilfssatz 4 enthalten, während es im Falle $p \geqq 2$ genügt, die betreffenden p Kugeln zu einer Familie F_0 zusammenzufassen, um den Satz 1b anwenden zu können.

Fall 2: *Es liegt nicht Fall* 1 *vor.*

Dann gibt es eine Folge von Durchschnitten

$$\mathfrak{D}_\mu := \mathfrak{K}_{1\mu} \cap \mathfrak{K}_{2\mu} \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_{p\mu} \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

von Kugeln $\mathfrak{K}_{\pi\mu}$ aus F, für die der Grenzwert

$$(36) \quad \begin{cases} d_0 := \lim\limits_{\mu \to \infty} d(\mathfrak{D}_\mu) & \text{existiert} \\ \text{und kleiner ist als der Durchmesser jedes Durchschnitts von irgend } p \\ \text{Kugeln aus } \mathsf{F}. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst an, die Familie F sei beschränkt; dann dürfen wir auf Grund des Auswahlsatzes von Blaschke [1] überdies annehmen, daß die Grenzkugeln (im Sinne der Distanz[15])

$$\mathfrak{K}_\pi := \lim_{\mu \to \infty} \mathfrak{K}_{\pi\mu} \qquad \pi = 1, 2, \ldots, p$$

sämtlich existieren (und endliche Radien besitzen). Wir betrachten nun den Durchschnitt

$$\mathfrak{D}_0 := \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{K}_p.$$

Er ist nicht leer (denn wir hatten die Kugeln als abgeschlossene Punktmengen definiert), und wenn er mehr als einen Punkt enthält, so enthält er auch innere, denn er ist streng konvex. Folglich ist

$$(37) \qquad d(\mathfrak{D}_0) = d_0.$$

Allgemein gilt: Ist $\mathfrak{D}$ irgendein Durchschnitt von Kugeln aus $\bar{\mathsf{F}} := \mathsf{F} \cup [\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p]$, und geht $\mathfrak{D}_\mu$ dadurch aus $\mathfrak{D}$ hervor, daß man jeder der Kugeln $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_p$, die in $\mathfrak{D}$ etwa auftritt, den Index μ anhängt, so ist

$$d(\mathfrak{D}) = \lim_{\mu \to \infty} d(\mathfrak{D}_\mu) \text{ und } \mathfrak{D} \neq \emptyset, \text{ falls } \mathfrak{D}_\mu \neq \emptyset \text{ für } \mu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Demnach erfüllt $\bar{\mathsf{F}}$ sowohl alle Voraussetzungen unseres Korollars wie auch diejenige des Falles 1 (cf. (36), (37)). Also ist $\bar{\mathsf{F}}$ — und a fortiori F — mit $1 + K_{n-p+1}$ Punkten i. w. S. erfaßbar.

Der allgemeinere Fall, daß nämlich F nicht beschränkt ist, läßt sich nun auf den eben behandelten zurückführen, indem man F durch eine aufsteigende Folge beschränkter Familien F_ι ausschöpft[16]. Von einem gewissen Index i ab ist die Minimalzahl der zur Erfassung von F_ι notwendigen Punkte $P_\varkappa$ konstant, etwa gleich $K (\leqq 1 + K_{n-p+1})$. Infolgedessen liegen diese Punkte für $\iota \geqq i$ sämtlich in der beschränkten Vereinigung der zu F_i gehörenden Kugeln. Daher kann man auf die $P_\varkappa$ nochmals den Auswahlsatz von Blaschke anwenden und erhält gewisse K Grenzpunkte $Q_\varkappa$, die — wegen der Abgeschlossenheit jeder einzelnen Kugel — F i. w. S. erfassen, w. z. b. w.

Die Schranke $1 + K_{n-p+1}$ in diesem Korollar ist natürlich sehr schlecht, was nicht verwundern kann, wenn man bedenkt, wieviel schwächer die Voraussetzungen hier sind

---

[15]) Die für jedes Punktmengenpaar definiert ist durch

$$\operatorname{dist}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] := \max\left[\sup_{P \in \mathfrak{A}} |P, \mathfrak{B}|; \sup_{Q \in \mathfrak{B}} |Q, \mathfrak{A}|\right].$$

[16]) Hierauf wurde ich von Herrn M. Kneser freundlicherweise aufmerksam gemacht.

als bei Satz 1. Schon im Falle $p = 1$ ist die Schranke $1 + K_{n-p+1} = 1 + K_n$ vermutlich viel zu groß. Jedenfalls ergäbe sich für $n = 2$ die Stichzahl sieben, während man hier tatsächlich stets mit vier Punkten auskommt[3]). — Selbst im Falle $p = n$ ist die von unserem Korollar gelieferte Schranke zwei nicht die beste, denn hier gilt bereits der Satz von Helly [2].

11. Vorbereitungen. In den übrigen Nummern dieser Arbeit bezeichne

$V_m(\varrho)$ das ($(m-1)$-dimensionale) Volumen einer Kugelkappe vom Radius ϱ auf der Einheits-$(m-1)$-Sphäre,

V_m die Oberfläche der m-dimensionalen Einheitskugel $\left(\text{also } V_m = V_m(\pi) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right)$,

$K_m(\varrho)$ die Mindestanzahl von Kugelkappen vom Radius ϱ, die man benötigt, um die $(m-1)$-Sphäre zu überdecken (es ist also $K_m(30°) = K_m$; cf. (36)),

$N_m(\varrho)$ die Höchstzahl von Kugelkappen vom Radius ϱ, die man auf der $(m-1)$-Sphäre lagern kann (das heißt, so verteilen kann, daß keine zwei von ihnen innere Punkte gemeinsam haben).

(38) { Bekanntlich ist $N_m(\varrho)$ identisch mit der Höchstzahl von Punkten, die man so auf der $(m-1)$-Sphäre verteilen kann, daß keine zwei von ihnen einen kleineren Abstand als 2ϱ aufweisen.

(Dies ist eine direkte Folge der Dreiecksungleichung.)

Nachdem wir in den Nummern 8 bis 10 das eingangs im Anschluß an Gallai gestellte Problem abgewandelt haben in ein anderes, das sich auf die Bestimmung der Zahlen $K_\mu(30°)$ zurückführen ließ, wollen wir nun diese Zahlen nach oben und nach unten abschätzen. Im Hinblick darauf, daß die Zahlen $K_\mu(\varrho)$ nicht nur in dem hier gegebenen Zusammenhang von Interesse sind, wollen wir uns nicht zu sehr auf den Fall $\varrho = 30°$ beschränken.

Den eigentlichen Abschätzungen schicken wir zwei Ungleichungen voraus:

a) Es ist

$$\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) > \Gamma(x)\sqrt{x - \frac{1}{4}} \quad \text{für} \quad x \geqq \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Beweis: Für $x = \frac{1}{2}$ ist das wegen $2 > \sqrt{\pi}$ richtig. Für $x > \frac{1}{2}$ besitzt die Folge

$$a_\nu := \frac{\Gamma\left(x + \nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+\nu)\sqrt{x + \nu - \frac{1}{4}}} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

die Minorante

$$b_\nu := \sqrt{\frac{x + \nu - \frac{1}{2}}{x + \nu - \frac{1}{4}}},$$

denn es ist

$$\frac{a_\nu^2}{b_\nu^2} = \left(\frac{\Gamma\left(x+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+\nu)}\right)^2 \cdot \frac{1}{x+\nu-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(x+\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(x+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+\nu)\,\Gamma(x+\nu)} \qquad \text{(Funktionalgleichung der } \Gamma\text{-Funktion)}$$

$$> 1 \qquad \text{(logarithmische Konvexität der } \Gamma\text{-Funktion).}$$

Ferner ist

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\Gamma\left(x+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(x+\nu)\sqrt{x+\nu-\frac{1}{4}}}{\Gamma(x+\nu+1)\,\Gamma\left(x+\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\nu+\frac{3}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(x+\nu+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(x+\nu-\frac{1}{4}\right)}{(x+\nu)^2\cdot\left(x+\nu+\frac{3}{4}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{16(x+\nu)^3+12(x+\nu)^2-1}{16(x+\nu)^3+12(x+\nu)^2}} < 1,$$

also

$$a_{\nu+1} < a_\nu.$$

Es folgt

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_\nu > b_\nu \qquad \text{für jedes } \nu;$$

und wegen $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = 1$ ergibt sich schließlich $a_0 > 1$, w. z. b. w.

b) Sei n eine nichtnegative ganze Zahl; dann ist

$$(40)\quad \cos\varrho\int_0^\varrho \sin^n\varphi\,d\varphi \leqq \frac{\sin^{n+1}\varrho}{n+1}\left(1-\frac{(n+5)\sin^2\varrho}{(n+3)\,[3+(n+2)\cos^2\varrho]}\right) \quad \text{für } 0\leqq\varrho\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Beweis: Für $0 \leqq \varphi \leqq \varrho$ ist

$$0 \leqq (\cos\varphi-\cos\varrho)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos^2\varphi\cos\varrho + 3\cos\varphi\cos^2\varrho - \cos^3\varrho,$$

folglich

$$3\cos\varrho \leqq 3\cos\varrho+\cos\varphi-\cos\varphi\sin^2\varphi-3\cos\varrho+3\cos\varrho\sin^2\varphi+3\cos\varphi\cos^2\varrho-\cos^3\varrho$$
$$= (1+3\cos^2\varrho-\sin^2\varphi)\cos\varphi+3\cos\varrho\sin^2\varphi-\cos^3\varrho$$

und damit — wenn wir zur Abkürzung $c := \cos\varrho$ und $s := \sin\varrho$ setzen —

$$3c\int_0^\varrho \sin^n\varphi\,d\varphi \leqq \frac{(1+3c^2)\,s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+3}}{n+3} + 3c\int_0^\varrho \sin^{n+2}\varphi\,d\varphi - c^3\int_0^\varrho \sin^n\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{(1+3c^2)\,s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+3}}{n+3} - \frac{3s^{n+1}c^2}{n+2} + 3c\,\frac{n+1}{n+2}\int_0^\varrho \sin^n\varphi\,d\varphi - c^3\int_0^\varrho \sin^n\varphi\,d\varphi$$

(partielle Integration)

oder

$$\cos\varrho \int_0^{\varrho} \sin^n\varphi d\varphi \left(3 - 3 + \frac{3}{n+2} + c^2\right) \leqq s^{n+1} \frac{2n+4+(n^2+6n+11)c^2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

schließlich also

$$\cos\varrho \int_0^{\varrho} \sin^n\varphi d\varphi \leqq s^{n+1} \frac{2n+4+(n^2+6n+11)c^2}{(n+1)(n+3)[3+(n+2)c^2]}$$

$$= \frac{s^{n+1}}{n+1}\left(1 - \frac{(n+5)s^2}{(n+3)[3+(n+2)c^2]}\right), \quad \text{w. z. b. w.}$$

12. Abschätzung von $K_m(\varrho)$ nach unten. In dieser und den beiden folgenden Nummern sei m eine natürliche Zahl und größer oder gleich zwei.

Trivialerweise ist

$$K_m(\varrho) \geqq \frac{V_m}{V_m(\varrho)}. \tag{41}$$

Um $V_m(\varrho)$ zu bestimmen, berechnen wir das (m-dimensionale) Volumen $\hat{V}_m(\varrho)$ des zugehörigen Sektors der Einheitskugel:

$$\hat{V}_m(\varrho) = \frac{V_{m-1}}{m-1}\left(\int_0^{\varrho} \sin^{m-1}\varphi(-d\cos\varphi) + \frac{\sin^{m-1}\varrho}{m}\cos\varrho\right)$$

(Aufteilung des Sektors in Kalotte und Kegel). Wegen $V_m(\varrho) = m\hat{V}_m(\varrho)$ bekommen wir — indem wir wieder $c := \cos\varrho$ und $s := \sin\varrho$ setzen —

$$V_m(\varrho) = \frac{V_{m-1}}{m-1}\left(m\int_0^{\varrho}\sin^m\varphi d\varphi + s^{m-1}c\right)$$

$$= \frac{V_{m-1}}{m-1}\left(-s^{m-1}c + (m-1)\int_0^{\varrho}\sin^{m-2}\varphi d\varphi + s^{m-1}c\right)$$

$$\leqq \frac{V_{m-1}}{m-1}\cdot\frac{s^{m-1}}{c}\left(1 - \frac{(m+3)s^2}{(m+1)(mc^2+3)}\right) \quad \text{(nach (40)).}$$

Eingesetzt in (41) liefert das

$$K_m(\varrho) \geqq \frac{(m-1)V_m c}{V_{m-1}} s^{1-m}\left(1 + \frac{(m+3)s^2}{(m^2+2m+3)c^2+2m}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)c}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(1+\cdots)s^{1-m},$$

schließlich also mit Hilfe von (39):

$$K_m(\varrho) \geqq \sqrt{(2m-1)\pi}\cos\varrho\left(1 + \frac{(m+3)\sin^2\varrho}{(m^2+2m+3)\cos^2\varrho+2m}\right)\sin^{1-m}\varrho$$

$$\text{für } 0 < \varrho < \frac{\pi}{2}.$$

Speziell erhalten wir für $\varrho = 30°$

$$K_m \geqq \frac{\sqrt{3(2m-1)\pi}}{2}\left(1 + \frac{m+3}{3m^2+14m+9}\right)2^{m-1} \tag{42}$$

und hieraus

$$K_m \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6m^2+13m-6}{m+2}\pi}\ 2^{m-1} \quad [17] \tag{43}$$

$$\approx \sqrt{\frac{3m\pi}{2}}\,2^{m-1}. \tag{43*}$$

In einer Tabelle am Ende der Nr. 14 werden wir für einige kleine Werte von m unter anderem diejenigen unteren Schranken aufführen, die sich aus (43) für K_m ergeben.

13. Abschätzung von $K_m(\varrho)$ nach oben. Bekanntlich ist

$$K_m(\varrho) \leqq N_m\left(\frac{\varrho}{2}\right) \quad [18)\ 19)]. \tag{44}$$

Ferner ist nach Rankin [11] für $0 < \tau < \frac{\pi}{4}$

$$N_m(\tau) \leqq \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)\sin^2\sigma}{2\cos\sigma\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\int_0^\sigma \sin^{m-2}\varphi\,(\cos\varphi-\cos\sigma)\,d\varphi}; \tag{45}$$

dabei ist σ definiert durch $\sin\sigma := \sqrt{2}\sin\tau\left(0<\sigma<\frac{\pi}{2}\right)$. Es folgt (unter Benützung von (39))

$$N_m(\tau) \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2m-3}}\cdot\frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma\int_0^\sigma \sin^{m-2}\varphi(\cos\varphi-\cos\sigma)\,d\varphi}$$

$$\leqq \sqrt{\frac{\pi}{2m-3}}\cdot\frac{\sin^2\sigma}{\cos\sigma\left[\frac{\sin^{m-1}\sigma}{m-1}-\frac{\sin^{m-1}\sigma}{m-1}\left(1-\frac{(m+3)\sin^2\sigma}{(m+1)(m\cos^2\sigma+3)}\right)\right]} \quad \text{(nach (40))}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2m-3}}\cdot\frac{(m^2-1)(m\cos^2\sigma+3)}{(m+3)\cos\sigma\sin^{m-1}\sigma}$$

und schließlich (mit Rücksicht auf $\cos^2\sigma = \cos 2\tau$)

$$N_m(\tau) \leqq \sqrt{\frac{\pi}{(2m-3)\cos 2\tau}}\cdot\frac{m^2-1}{m+3}(m\cos 2\tau+3)\left(\sqrt{2}\sin\tau\right)^{1-m} \quad \text{für } 0<\tau<\frac{\pi}{4}.$$

---

[17]) Die rechte Seite von (43) ist erst für $m \geqq 4$ kleiner als diejenige von (42). Trotzdem gilt (43) schon ab $m = 2$, denn die numerische Rechnung ergibt die unteren Schranken

für $m =$	2	3	4
nach (42)	5,859	14,785	34,50
nach (43)	5,884	14,788	34,49

und K_m ist definitionsgemäß eine natürliche Zahl.

[18]) An dieser Stelle habe ich Herrn M. Kneser zu danken, der mich an die Möglichkeit erinnerte, die Dichte einer dünnsten Kegelüberdeckung mit Hilfe der dichtesten Kugellagerung zum halben Radius nach oben abzuschätzen.

[19]) Genauer: Eine Lagerung von Kugeln des Radius τ heiße *gesättigt*, wenn jede Kugel vom selben Radius mindestens eine Kugel der Lagerung trifft. Dann ist die Mindestanzahl $N_m^*(\tau)$ der Kugeln in einer gesättigten Kugellagerung zum Radius τ nicht kleiner als $K_m(2\tau)$. (Dies ergibt sich direkt aus (38).) Eigene Abschätzungen für $N_m^*(\tau)$ sind dem Verfasser nicht bekannt. Trivialerweise ist $N_m^*(\tau) \leqq N_m(\tau)$. (N. B.: Für kleine τ ist $N_2^*(\tau) \approx \frac{1}{2}N_2(\tau)$ und $N_3^*(\tau) \approx \frac{1}{3}N_3(\tau)$.) Für den Fall $m = 3$ cf. Fejes Tóth [7].

Speziell für $\tau = 15°$ erhalten wir (cf. (44))

$$K_m \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{3}\pi}{6(2m-3)}} \cdot \frac{m^2-1}{m+3}\,(m\sqrt{3}+6)\,(1+\sqrt{3})^{m-1} \tag{46}$$

und hieraus

$$K_m \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}(m^3+2{,}5\,m^2-m+2)\,\pi}\,(1+\sqrt{3})^{m-1}\ ^{20}) \tag{47}$$

$$\approx \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}(m+1)^3\,\pi}\,(1+\sqrt{3})^{m-1}. \tag{47*}$$

In der Tabelle am Ende der nächsten Nummer werden wir für einige kleine Werte von m auch diejenigen oberen Schranken aufführen, die sich aus (47) ergeben.

14. Genauere Abschätzungen für K_2, K_3, K_4 und tabellarische Übersicht. Nachdem die Ungleichungen (43) und (47) mindestens für kleines m recht unbefriedigend sind, wollen wir die eben hergeleiteten Schranken für K_2 bis K_4 noch verbessern:

(48) **a)** Es ist $K_2 = 6$.

Das ergibt sich unmittelbar aus der Definition von K_2 (cf. (31)). Figur 3 veranschaulicht den Hilfssatz 4a im Falle $m = 2$.

b) Es ist

$$K_3 \geqq 19. \tag{49}$$

Dies ergibt sich aus der folgenden Ungleichung von Fejes Tóth[21]):

$$\text{Für } \varkappa > 2 \text{ ist } D_\varkappa \geqq \frac{\varkappa}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-2}\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right); \tag{50}$$

darin bedeutet $D_\varkappa$ das Infimum der Überdeckungsdichten, die man bei einer Überdeckung der 2-Sphäre mit $\varkappa$ kongruenten Kreiskappen erreichen kann. Setzt man hier $\varkappa = 18$ ein, so erhält man für die Fläche F_{18} der kleinsten Kappe, die noch eine Überdeckung mit achtzehn Exemplaren gestattet:

$$\frac{18F_{18}}{V_3} =: D_{18} \geqq 9 - 3\sqrt{3}\operatorname{ctg}(33°\,45')$$
$$> 9 - 5{,}2 \cdot 1{,}497$$
$$> 1{,}215\,,$$

und damit

$$F_{18} > \frac{4\pi \cdot 1{,}215}{18} = 0{,}27\,\pi.$$

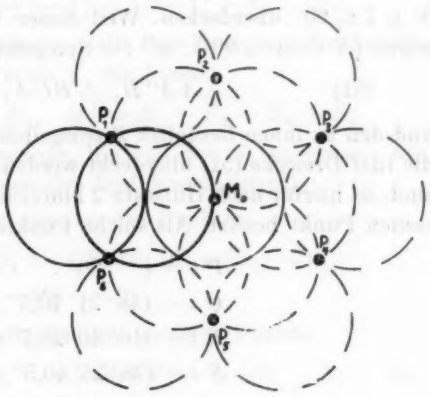

Fig. 3

[20]) Die rechte Seite von (47) ist erst für $m \geqq 5$ größer als diejenige von (46). Trotzdem gilt (47) schon ab $m = 2$, denn die numerische Rechnung ergibt die oberen Schranken

für $m =$	2	3	4	5
nach (46)	14,775	61,265	240,60	881,96
nach (47)	13,520	60,630	240,22	882,64
direkt nach (44) und (45), d. h. ohne Benützung von (39) und (40)	13,078	59,795	238,10	

und K_m ist definitionsgemäß eine natürliche Zahl.

[21]) [8] p. 114, Ungleichung (2).

Es ist aber

$$V_3(30°) = 2\pi(1 - \cos 30°) = (2 - \sqrt{3})\pi < 0{,}268\pi.$$

Demnach ist $K_3 \geqq 19$, wie behauptet.

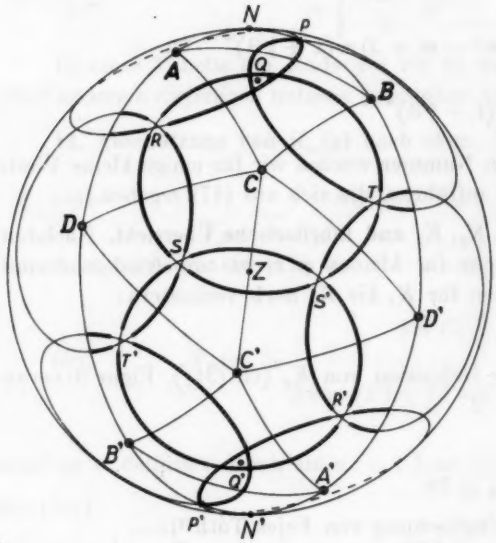

Fig. 4.

c) Obere Schranken für K_m kann man für kleines m am einfachsten durch Konstruktion spezieller Überdeckungen der $(m-1)$-Sphäre gewinnen. Wir wollen daher zum Abschluß je eine Überdeckung der 2-Sphäre und der 3-Sphäre angeben:

α) Um zunächst die 2-Sphäre zu überdecken, gehen wir aus von vier Kreiskappen mit dem Radius 30°, deren geographische Koordinaten (die erste Koordinate bedeute die Länge l, die zweite die Breite b) gegeben seien durch (cf. Fig. 4)

$$\begin{aligned} A &:= (\ 0° &&;\ 64°\ 42'\ 1''),\\ B &:= (90° &&;\ 44°\ 22'\ 18''),\\ C &:= (48°\ 21'\ 40{,}5''; &&\ 24°\ 38'\ 21''),\\ D &:= (\ 0° &&;\ 11°\ 12'\ 50''). \end{aligned}$$

Durch Spiegelung am Punkt $Z := (45°, 0°)$ erhalten wir vier weitere Kappen mit den Mittelpunkten A', B', C', D'.

Wir wollen nun zeigen, daß die bisher angegebenen acht Kappen den Quadranten $0° \leqq l \leqq 90°$ überdecken. Weil dieser Quadrant von den konvexen sphärischen Dreiecken ($N := (—, 90°)$; $A'' :=$ Spiegelbild von A an N)

$$(51) \qquad \triangle AA''B,\ \triangle BCA,\ \triangle ACD,\ \triangle DCC',\ \triangle D'CB$$

und den zu ihnen bezüglich Z spiegelbildlichen überdeckt wird, genügt es zu zeigen, daß die fünf Dreiecke (51) überdeckt werden. Da jeweils alle drei Ecken Kappenmittelpunkte sind, ist hierfür nach Hilfssatz 2 hinreichend, daß jedes dieser Kappentripel einen gemeinsamen Punkt besitzt. Als solche Punkte wählen wir

$$\begin{aligned} P &:= (\ \ 90° &&;\ 74°\ \ 0'\ 52{,}4'') \text{ für } \triangle AA''B,\\ Q &:= (48°\ 21'\ 40{,}5''; &&\ \ 52°\ \ \ \ ) \text{ für } \triangle BCA,\\ R &:= (16°\ 40'\ 24{,}7''; &&\ 36°\ 46'\ 12{,}3'') \text{ für } \triangle ACD,\\ S &:= (28°\ 25'\ 46{,}5''; &&\ \ 2°\ \ 5'\ 16{,}5'') \text{ für } \triangle DCC',\\ T &:= (78°\ 47'\ 57{,}2''; &&\ 16°\ 16'\ 47{,}9'') \text{ für } \triangle D'CB. \end{aligned}$$

Durch trigonometrische Rechnung erhält man nun die Ungleichungen

$$(52) \quad \begin{cases} 29°\ 38'\ 33{,}5'' \leqq \left\{ \begin{array}{l} |\widehat{AP}|, |\widehat{BP}|, |\widehat{AR}|, |\widehat{CR}|, \\ |\widehat{DR}|, |\widehat{DS}|, |\widehat{CS}|, \\ |\widehat{C'S}|, |\widehat{D'T}|, |\widehat{CT}|, |\widehat{BT}| \end{array} \right\} \leqq 29°\ 38'\ 34{,}4'', \\ |\widehat{AQ}| < 27°\ 29',\ |\widehat{BQ}| < 28°\ 22',\ |\widehat{CQ}| < 27°\ 22'. \end{cases}$$

Alle relevanten Abstände sind also kleiner als 30°, so daß der Quadrant $0° \leqq l \leqq 90°$ tatsächlich überdeckt wird. Durch Spiegelung an den beiden Meridianebenen $l = 0°, 180°$

und $l = 90°, 270°$

(53) $\left\{\begin{array}{l}\text{erhält man nunmehr eine Überdeckung der 2-Sphäre}\\ \text{mit zwanzig Kreiskappen vom Radius } 30°.\end{array}\right.$

Wie die Ungleichungen (52) lehren, kann man die 2-Sphäre sogar mit zwanzig Kappen vom Radius 29° 38′ 35″ überdecken, und es spricht einiges dafür, daß dies mit einem wesentlich kleineren Radius nicht mehr geht. Aus der Annahme, der kleinste Radius, zu dem es noch eine Überdeckung mit zwanzig Kappen gibt, sei nicht kleiner als 29° 30′, würde folgen:

$$D_{20} \geqq \frac{20 \cdot V_2(29° 30')}{V_2} = \frac{20 \cdot 2\pi(1 - \cos 29° 30')}{4\pi}$$
$$= 10(1 - \cos 29° 30') > 1{,}296.$$

Andererseits würde eine Überdeckung mit neunzehn Kappen vom Radius 30°

$$D_{19} \leqq \frac{19 \cdot V_2(30°)}{V_2} = 9{,}5\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 1{,}273$$

liefern. Es dürfte also zumindest nicht ganz leicht sein, $K_2 = 19$ zu verifizieren.

β) Nach demselben Prinzip, wie soeben für die 2-Sphäre, wollen wir jetzt eine Überdeckung der 3-Sphäre konstruieren. Um bequem rechnen zu können, benützen wir cartesische Koordinaten im $\mathfrak{E}^5$ und legen unsere 3-Sphäre in die Hyperebene $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 0$ sowie ihren Mittelpunkt in den Ursprung. Einem Punkt der 3-Sphäre entspricht dann eine Klasse von Vektoren, die sich nur um einen positiven Skalarfaktor unterscheiden. Wir betrachten nun das Simplex mit den Eckpunkten

$$E_1 := (4; -1; -1; -1; -1), \quad E_2 := (-1; 4; -1; -1; -1),$$
$$\cdots \qquad E_5 := (-1; -1; -1; -1; 4).$$

Die baryzentrische Normalunterteilung seines Randes stellt eine Zerlegung der 3-Sphäre in 120 kongruente Orthoscheme $\mathfrak{T}_i$ dar, wobei etwa $\mathfrak{T}_1$ die Punkte

$$E_1,\ K := E_1 + E_2,\ F := E_1 + E_2 + E_3,\ M := E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

zu Eckpunkten hat. (Die diskrete Bewegungsgruppe, die von den $\mathfrak{T}_i$ zugelassen wird, besteht gerade aus den sämtlichen Permutationen der fünf Koordinaten.)

Um zunächst $\mathfrak{T}_1$ zu überdecken, gehen wir aus von den Punkten

(54) $\left\{\begin{array}{l}A_1 := (7; 2; -3; -3; -3), \quad B_1 := (38; 38; 10; -43; -43),\\ \qquad\qquad C_1 := (7; 1; 1; 1; -10)\end{array}\right.$

und erhalten durch Spiegelungen an den Seitenflächen die weiteren Punkte

(55) $\left\{\begin{array}{ll}A_2 := (7; -3; 2; -3; -3), & A_3 := (7; -3; -3; 2; -3),\\ A_4 := (7; -3; -3; -3; 2), & A_5 := (2; 7; -3; -3; -3),\\ B_2 := (38; 10; 38; -43; -43), & B_3 := (10; 38; 38; -43; -43),\\ B_4 := (38; 38; -43; 10; -43), & C_2 := (1; 1; 7; 1; -10),\\ C_3 := (1; 7; 1; 1; -10), & C_4 := (1; 1; 1; 7; -10).\end{array}\right.$

Nun bilden die sphärischen Polyeder

$$\mathfrak{P}_1 := \operatorname{conv}\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \qquad \mathfrak{P}_2 := \operatorname{conv}\{A_3, A_2, A_1, C_1\}$$
$$\mathfrak{P}_3 := \operatorname{conv}\{A_2, A_1, C_1, B_1, B_2\}, \qquad \mathfrak{P}_4 := \operatorname{conv}\{B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$$
$$\mathfrak{P}_5 := \operatorname{conv}\{C_1, C_2, C_3, C_4\}, \qquad \mathfrak{P}_6 := \operatorname{conv}\{C_1, C_3, B_1, B_4\}$$
$$\mathfrak{P}_7 := \operatorname{conv}\{C_1, B_1, B_4, A_1\}, \qquad \mathfrak{P}_8 := \operatorname{conv}\{B_1, B_4, A_1, A_5\}$$

eine Überdeckung von $\mathfrak{T}_1$. Um Hilfssatz 2 anwenden zu können, wählen wir noch in jedem von ihnen einen Hilfspunkt, nämlich

$$E_1 \in \mathfrak{P}_1, \qquad P_2 := (\ 8; -4; \ -4; -\ 1; -\ 5) \in \mathfrak{P}_2,$$
$$P_3 := (42;\ 5;\ 5; -19; -33) \in \mathfrak{P}_3, \qquad P_4 := (112; 112;\ 112; -67; -269) \in \mathfrak{P}_4,$$
$$M \in \mathfrak{P}_5, \qquad P_6 := (\ 47;\ 47; -12; -12; -\ 70) \in \mathfrak{P}_6,$$
$$P_7 := (19; 13; -5; -5; -22) \in \mathfrak{P}_7, \qquad P_8 := (\ 7;\ \ 7; -\ 3; -\ 3; -\ \ 8) \in \mathfrak{P}_8$$

und bekommen durch Bildung der entsprechenden Skalarprodukte die Ungleichungen

$$0{,}75754 < \left\{ \begin{array}{llll} \cos^2|\widehat{E_1A_1}|, & \cos^2|\widehat{P_2A_1}|, & \cos^2|\widehat{P_2C_1}|, & \\ \cos^2|\widehat{P_3A_1}|, & \cos^2|\widehat{P_3B_1}|, & \cos^2|\widehat{P_3C_1}|, & \\ \cos^2|\widehat{P_4B_1}|, & \cos^2|\widehat{P_4C_1}|, & \cos^2|\widehat{P_6B_1}|, & \cos^2|\widehat{P_6C_1}|, \\ \cos^2|\widehat{P_7A_1}|, & \cos^2|\widehat{P_7B_1}|, & \cos^2|\widehat{P_8A_1}| & \end{array} \right\} < 0{,}767$$

$$0{,}783 < \quad \cos^2|\widehat{MC_1}|, \quad \cos^2|\widehat{P_7C_1}|, \quad \cos^2|\widehat{P_8B_1}|\,.$$

(Jeder der übrigen in Betracht zu ziehenden Abstände ist aus Symmetriegründen gleich einem der hier angegebenen.)

Das bedeutet, daß das Orthoschem $\mathfrak{T}_1$ von den Kugelkappen mit den Mittelpunkten (54) und (55) und dem Radius $\arccos\sqrt{0{,}75754} < 29^\circ\,30'$ überdeckt wird. — Durch fortgesetztes Spiegeln an den Seitenflächen bekommen wir nunmehr

(56) eine Überdeckung der 3-Sphäre mit siebzig Kappen vom Radius $29^\circ\,30'$,

denn diese Spiegelungen überführen

den Punkt A_1 in insgesamt $\dfrac{5!}{3!} = 20$ Punkte,

den Punkt B_1 in insgesamt $\dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$ Punkte und

den Punkt C_1 in insgesamt $\dfrac{5!}{3!} = 20$ Punkte.

Faßt man die Ergebnisse der letzten drei Nummern zusammen, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Schranken für K_m.

Index (= Dimension der betreffenden Kugel)	untere Schranke nach (43) (in der letzten Zeile nach (43*))	untere Schranke nach (48) bzw. (49)	obere Schranke nach (48) bzw. (53) bzw. (56)	obere Schranke nach (47) (in der letzten Zeile nach (47*))
2	6	6	6	13
3	15	19	20	60
4	35	(51)[22]	70	240
5	78			882
6	171			3085
8	788			34196
12	15447			3365310
m	$\sqrt{\dfrac{3m\pi}{2}}\,2^{m-1}$			$\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}(m+1)^3\pi}\,(1+\sqrt{3})^{m-1}$

[22]) Diese Zahl würde sich aus der Annahme ergeben, daß auf der 3-Sphäre die Dichte einer Kugelüberdeckung nicht kleiner sein kann, als diejenige, die sich für ein reguläres Simplex ergibt, wenn man in jede seiner

Für die Quotienten q aus oberer und unterer Schranke in (47) beziehungsweise (43) gilt

$$q < (m + 1{,}2)\, 1{,}3661^{m-3}.$$

Zu der starken Diskrepanz zwischen oberer und unterer Schranke ist zu bemerken, daß die untere vermutlich wesentlich besser ist als die obere (genauer: Es ist anzunehmen, daß $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{K_m} = 2$ gilt). In diese Richtung deutet jedenfalls das Resultat von C. A. Rogers [15], wonach es für $n \geqq 3$ zu jedem n-dimensionalen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ eine Überdeckung des $\mathfrak{E}^n$ mit zu $\mathfrak{K}$ translationsgleichen Körpern gibt, deren Dichte kleiner ist als $n \log n + n \operatorname{loglog} n + 5n$. Soweit dem Verfasser bekannt, ist jedoch dieses Ergebnis noch nicht auf den Fall der n-Sphäre übertragen worden.

Literaturverzeichnis.

[1] *W. Blaschke*, Kreis und Kugel. Leipzig 1916 (Auswahlsatz für konvexe Mengen: p. 62).

[2] *E. Helly*, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. Jber. dtsch. Math.-Ver. **32** (1923), 175—176.

[3] *H. F. Blichfeldt*, The minimum value of quadratic forms and the closest packing of spheres. Math. Ann. **101** (1929), 605—608.

[4] *R. Kershner*, The number of circles covering a set. Amer. J. Math. **61** (1939), 665—671.

[5] *L. Fejes Tóth*, Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten. Matem. és Fizikai Lapok **50** (1943), 40—46.

[6] *L. Nachbin*, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Transact. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 28—46.

[7] *L. Fejes Tóth*, Über gesättigte Kreissysteme. Math. Nachr. **5** (1951), 253—258.

[8] *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. (Grundlehren der math. Wiss. Bd. LXV). Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[9] *B. Sz.-Nagy*, Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. Acta Szeged **15** (1954), 169—177.

[10] *H. Hadwiger* und *H. Debrunner*, Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. Enseignement math., 2. Ser., **1** (1955), 56—89. In erweiterter Fassung 1959 als Monographie erschienen unter dem Titel „Kombinatorische Geometrie der Ebene".

[11] *R. A. Rankin*, The closest packing of spherical caps in n dimensions. Proc. Glasgow math. Assoc. **2** (1955), 139—144.

[12] *K. Schütte*, Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen. Math. Ann. **129** (1955), 181—186.

[13] *G. L. Watson*, The covering of space by spheres. Rend. Circ. mat. Palermo, 2. Ser., **5** (1956), 93—100.

[14] *H. Hadwiger*, Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern. Arch. Math. **8** (1957), 212—213.

[15] *C. A. Rogers*, A note on coverings. Mathematika **4** (1957), 1—6.

[16] *H. Hadwiger*, Ungelöstes Problem Nr. 19. Elemente d. Math. **12** (1957), 109/110.

[17] *C. A. Rogers*, The packing of equal spheres. Proc. London Math. Soc., 3. Ser., **8** (1958), 609—620.

[18] *B. Grünbaum*, On intersections of similar sets. Portug. Math. **18** (1959), 155—164.

[19] *H. S. M. Coxeter*, *L. Few* and *C. A. Rogers*, Covering the space with equal spheres. Mathematika **6** (1959), 147—157.

[20] *L. Fejes Tóth*, Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie. Elem. d. Math. **15** (1960), 25—36.

Ecken einen Kappenmittelpunkt legt und als Überdeckungsradius den Umkugelradius wählt. Diese Aussage ist sowohl für Überdeckungen der 2-Sphäre wie auch für solche des $\mathfrak{E}^n$ richtig (ersteres ist die Ungleichung (50) von Fejes Tóth, letzteres das Hauptergebnis der Arbeit von Coxeter, Few und Rogers [19]), ist aber wohl bisher nicht auf den Fall der n-Sphäre übertragen worden.

Eingegangen 5. September 1960.

Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien.

Von *W. Wunderlich* in Wien.

Die kartenmäßige Darstellung einer Geländefläche in Form eines Schichtenplans wird gelegentlich durch Eintragen der Fallinien ergänzt, welche das System der Schichtenlinien orthogonal durchsetzen. Im Gegensatz zu den Schichtenlinien, die als Horizontalschnitte der Fläche naturgemäß eben sind, handelt es sich bei den Fallinien im allgemeinen um echte Raumkurven. Nun gibt es aber doch auch *besondere Flächen*, deren *sämtliche Fallinien eben* sind. Hier wären vor allem die *Horizontalzylinder* sowie die *Drehflächen* mit lotrechter Achse zu erwähnen, ferner in direkter Verallgemeinerung die *Gesimsflächen* mit lotrechtem Evolutenzylinder. Letztere werden von einer beliebigen ebenen Profilkurve erzeugt, deren Ebene auf einem Vertikalzylinder abrollt: Die Bahnen der einzelnen Profilpunkte bilden dabei die Schichtenlinien, die einzelnen Lagen der Profilkurve die Fallinien der erzeugten Fläche. Neben diesen trivialen Beispielen finden sich jedoch verstreut noch Hinweise auf Flächen, deren Fallinien in schrägen Ebenen verlaufen. So bestimmte E. Müller die *Schraubflächen* [1], der Verfasser in analoger Weise die *Spiralflächen* mit ebenen Fallinien [3]; in beiden Fällen treten *Parabeln* als Fallinien auf, nämlich die ebenen Komplexkurven des jeweiligen (tetraedralen) Bahntangentenkomplexes. *Algebraische Flächen* vierter Ordnung mit ebenen Fallinien in Gestalt von *Kegelschnitten* (insbesondere Kreisen) entdeckte L. Eckhart [2]; der zugehörige Schichtenplan besteht aus konfokalen Kegelschnitten. Daß es zu einem solchen Schichtenplan noch allgemeinere Flächen (achter bzw. im parabolischen Fall ebenfalls vierter Ordnung) mit Kegelschnitten als Fallinien gibt, zeigte kürzlich der Verfasser in einer Arbeit [4], die überdies die Antwort auf die Frage nach den *allgemeinsten Flächen mit ebenen Fallinien* enthält. Schließlich sei noch auf eine Untersuchung dreier spezieller *Römerflächen* hingewiesen [5], welche dadurch ausgezeichnet sind, daß sie durchwegs *Parabeln* als Fallinien besitzen.

Unter diesen Umständen drängt sich das Problem der Bestimmung *sämtlicher (reellen) Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien* geradezu auf, und es soll in der vorliegenden Abhandlung vollständig erledigt werden. Es zeigt sich dabei, daß die allgemeinsten Flächen mit *Ellipsen* oder *Hyperbeln* als Fallinien im wesentlichen — d. h. wenn man von Gesimsflächen absieht — mit den bereits in [4] behandelten Flächen 8. Ordnung identisch sind, während die Flächen mit *Parabeln* als Fallinien eine wesentlich ausgedehntere Mannigfaltigkeit bilden.

I. Flächen mit Ellipsen als Fallinien.

Legt man eine *Ellipse* im Raum durch zwei konjugierte Halbmesser CA und CB fest, so kann jede aus Ellipsen aufgebaute Fläche in einem Normalkoordinatensystem

$O(x, y, z)$ mittels der von einem Parameter v abhängigen Vektoren $\overrightarrow{CA} = \mathfrak{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathfrak{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \mathfrak{c}$ in der folgenden Weise angesetzt werden:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) \cdot \cos u + \mathfrak{b}(v) \cdot \sin u + \mathfrak{c}(v). \tag{1}$$

Sollen nun die Ellipsen $v = \text{const}$ die *Fallinien* der Fläche sein, dann müssen in jedem Punkt die Falltangente $\mathfrak{x}_u$ und die Flächennormale $\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ einer Vertikalebene angehören. Unter der üblichen Annahme, daß die z-Achse die Lotrichtung anzeigt, bedeutet dies für die Komponenten n_i von $\mathfrak{n}$ die Bedingung

$$n_1 : n_2 = x_u : y_u. \tag{2}$$

Aus dieser für alle u und v geltenden Identität wären die neun Komponenten a_i, b_i und c_i $(i = 1, 2, 3)$ von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zu ermitteln.

Die angedeutete Rechnung läßt sich nun durch eine einfache geometrische Überlegung erheblich abkürzen. Zunächst darf einmal der Ellipsenhalbmesser CA ohne Einschränkung der Allgemeinheit als horizontal vorausgesetzt, also von vornherein $a_3 = 0$ angenommen werden. Betrachten wir nunmehr die beiden Flächenkurven $u = \pm \pi/2$, die als Orte höchster bzw. tiefster Punkte kurz als „*Kammweg*“ bzw. „*Talweg*“ der (Gelände-) Fläche angesprochen werden sollen. In einem solchen Punkt B ist die Falltangente waagrecht $(\mathfrak{x}_u = \mp \mathfrak{a})$, mithin auch die Tangentialebene und damit auch jede andere Fortschreitrichtung in B, insbesondere jene des Kamm- oder Talwegs. Hieraus folgt aber sofort die wichtige Tatsache, daß *Kamm- und Talweg unserer Fläche horizontal* sind, falls sie nicht überhaupt auf Punkte zusammenschrumpfen. Verlegen wir diese Wege (bzw. Gipfel- oder Muldenpunkte) durch entsprechende Wahl des Maßstabs in die Ebenen $z = \pm 1$, dann liegt das Ellipsenzentrum C in der Koordinatenebene $z = 0$ und wir können von vornherein die Festsetzungen

$$a_3 = 0,\ b_3 = 1,\ c_3 = 0 \tag{3}$$

treffen. Jetzt sind aber die Parameterlinien $u = \text{const}$ mit den *Schichtenlinien* $z = \sin u = \text{const}$ identisch, so daß sich die Forderung, die Ellipsen $v = \text{const}$ mögen die Fallinien der Fläche sein, einfach auf die *Orthogonalitätsbedingung*

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0 \tag{4}$$

reduziert.

Diese Bedingung lautet im vorliegenden Falle auf Grund des Ansatzes (1):

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}' \sin u - \mathfrak{b}\mathfrak{c}' \cos u + \mathfrak{a}\mathfrak{b}' \sin^2 u - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} \cos^2 u + (\mathfrak{a}\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}\mathfrak{b}') \sin u \cos u = 0, \tag{5}$$

und ist nur dann identisch in u erfüllt, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Es ist also das nachstehende System von Differentialgleichungen zu lösen:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}' = 0,\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}' = 0,\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}' = 0,\ \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0,\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}\mathfrak{b}' = 0. \tag{6}$$

Die ersten beiden Teilgleichungen von (6) lauten mit Rücksicht auf (3):

$$a_1 c_1' + a_2 c_2' = 0,\ b_1 c_1' + b_2 c_2' = 0. \tag{7}$$

Hier ist nun zu unterscheiden, ob diese Gleichungen, als Bestimmungsgleichungen für c_1' und c_2' aufgefaßt, linear abhängig sind oder nicht.

1. Fall: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. — Die Relation $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ besagt, daß die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannte Ellipsenebene vertikal ist. Dies bedeutet aber, daß sich als Lösung eine der einleitend erwähnten *Gesimsflächen* (mit elliptischem Profil) einstellt. Dieser triviale Fall braucht mithin nicht weiter verfolgt zu werden.

2. Fall: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. — Hier folgt aus $c_1' = c_2' = 0$ die Konstanz von $\mathfrak{c}$: *Alle Fallellipsen haben denselben Mittelpunkt C*, den wir durch eine Verschiebung des Koordinatensystems mit dem Ursprung zusammenfallen lassen wollen ($c_1 = c_2 = 0$). — Die dritte und vierte Teilgleichung von (6) bedingt die Konstanz von $\mathfrak{ab} = p$, die letzte die Konstanz von $\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 2q - 1$. Eliminiert man jetzt aus diesen Beziehungen, zusammen mit $a_1 b_1' + a_2 b_2' = 0$, die Variablen a_1 und a_2, so erhält man in

$$\frac{p^2(b_1'^2 + b_2'^2)}{(b_1 b_2' - b_2 b_1')^2} - (b_1^2 + b_2^2) = 2q, \quad (p, q = \text{const}) \tag{8}$$

die Differentialgleichung des *Kammwegs*. Mit Rücksicht auf die zu erwartende Drehschar von Lösungskurven erscheint die Einführung von Polarkoordinaten durch

$$b_1 = r\cos\varphi, \; b_2 = r\sin\varphi \tag{9}$$

angezeigt. Die Gleichung (8) erhält dann die Gestalt

$$p^2(\dot{r}^2 + r^2) = r^4(r^2 + 2q) \tag{10}$$

und läßt sich nach Trennung der Variablen durch

$$\varphi = \int \frac{p\,dr}{r\sqrt{r^4 + 2qr^2 - p^2}} \tag{11}$$

integrieren. Dieses Integral ist elementar auswertbar[1]) und liefert für ein repräsentierendes Element der lösenden Drehschar die Kurve

$$2r^2 \sin\varphi(p\cos\varphi + q\sin\varphi) = p^2. \tag{12}$$

Die kartesische Gleichung

$$2b_2(pb_1 + qb_2) = p^2 \tag{13}$$

lehrt, daß *Kamm- und Talweg* unserer Fläche *Hyperbeln* sind, die allenfalls in *Geraden* ausarten können.

Auf Grund dieses Zwischenergebnisses empfiehlt es sich nun, nach Drehung des Koordinatensystems und durch Verfügen über die noch offene Verteilung des Parameters v den adäquaten Ansatz

$$b_1 = m \cdot \operatorname{ch} v, \; b_2 = n \cdot \operatorname{sh} v \qquad (m, n = \text{const}) \tag{14}$$

zu treffen und damit neuerdings in das Gleichungssystem (6) einzugehen[2]). Mit Rücksicht auf $\mathfrak{ab}' = 0$ gilt dann

$$a_1 = \lambda n \cdot \operatorname{ch} v, \; a_2 = -\lambda m \cdot \operatorname{sh} v, \tag{15}$$

und zwar wegen $\mathfrak{ab} = \text{const}$ mit festem λ, wenn $mn \neq 0$ ist; der Wert von λ ist zufolge $\mathfrak{aa}' = \mathfrak{bb}'$ mit $\lambda = 1$ (oder -1) festzulegen. Damit gelangt man zur nachstehenden *Parameterdarstellung* unserer Fläche:

$$\begin{aligned} x &= (m\sin u + n\cos u)\operatorname{ch} v, \\ y &= (n\sin u - m\cos u)\operatorname{sh} v, \\ z &= \sin u. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1]) Man setze die Quadratwurzel im Nenner gleich $r^2 - t$; für die rationalisierende neue Veränderliche t erhält man dann die Darstellung $t = p \cdot \operatorname{ctg}(\varphi - \varphi_0)$.

[2]) Der eine Hyperbelast wird dabei für reelle Parameterwerte, der andere für komplexe mit dem Imaginärteil πi erhalten.

Bedenkt man schließlich, daß die Multiplikation von x und y mit einem gemeinsamen konstanten Faktor nur eine unwesentliche affine Verformung der Fläche verursacht, bei der die Schichtenlinien bloß ähnliche Veränderungen erleiden und die Fallinien ihren Charakter bewahren, so mag man die Koeffizienten m und n noch durch die Festsetzung $m^2 + n^2 = 1$ normieren. Nimmt man überdies eine Verschiebung des Nullpunkts der u-Skala um den durch $\sin \alpha = m$, $\cos \alpha = n$ bestimmten Winkelwert α vor, so vereinfacht sich die Flächendarstellung zu

$$x = \cos u \cdot \operatorname{ch} v, \quad y = \sin u \cdot \operatorname{sh} v, \quad z = \sin (u + \alpha). \tag{17}$$

Nun ist noch der zurückgestellte Fall $mn = 0$ zu erledigen, in dem die Forderung $\mathfrak{ab} = \text{const}$ wegen $\mathfrak{ab} = 0$ keinen Aufschluß über λ gibt. Dafür liefert die Bedingung $\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \text{const}$ etwa für die Annahme $m = 0$, $n \neq 0$ die Komponenten von $\mathfrak{a}$ vermöge

$$a_1^2 = n^2 \operatorname{sh}^2 v + c, \quad a_2 = 0, \tag{15a}$$

wobei allerdings nur die Wahl $c = 0$ etwas Neues bringt, nämlich die noch nicht durch (16) erfaßte Fläche

$$x = v \cdot \cos u, \quad y = v \cdot \sin u, \quad z = \sin u. \tag{18}$$

Hierbei wurde zur Vereinfachung der Parameterwechsel $n \operatorname{sh} v \to v$ vorgenommen. Die Alternative $n = 0$, $m \neq 0$ führt im wesentlichen auf die gleiche Fläche. Zusammenfassend ist damit festgestellt:

Satz 1. *Abgesehen von den Gesimsflächen mit elliptischem Profil sind die Flächen* (17) *und* (18) *und die durch affine Streckung der z-Koordinate daraus ableitbaren die einzigen Flächen, die Ellipsen zu Fallinien haben.*

Die Flächen (17), deren *Schichtenplan* aus einer Schar *konfokaler Hyperbeln*

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1$$

besteht, wozu als Falliniengrundrisse die dazu orthogonalen konfokalen Ellipsen

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1$$

treten, wurden bereits in [4] diskutiert. Diese Flächen sind geometrisch vollständig gekennzeichnet durch die Feststellung, daß ihre Schichtenlinien Hyperbeln sind, deren Brennpunkte auf dem vertikalen Parallelenpaar $x = \pm 1$, $y = 0$ liegen („Fokalachsen"), während die zugehörigen Scheitel das Ellipsenpaar $x = \pm \cos u$, $z = \sin (u + \alpha)$ erfüllen (Abb. 1). Im allgemeinen handelt es sich um *Flächen 8. Ordnung*, deren Fallellipsen in den Tangentialebenen des vom Zentrum O ausstrahlenden Berührungskegels 4. Klasse verlaufen. Als Basis dieses der Fläche doppelt umschriebenen Kegels kann die Evolute des Talwegs genommen werden, der ja von allen Fallinien rechtwinklig überquert wird. — In den *Sonderfällen* $\alpha = 0$ $(m = 0,\ n = 1)$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(m = 1,\ n = 0)$ stellen sich zum gleichen Schichtenplan jene *Flächen 4. Ordnung*

$$\frac{x^2}{1 - z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1 \text{ bzw. } \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{1 - z^2} = 1 \tag{19a, b}$$

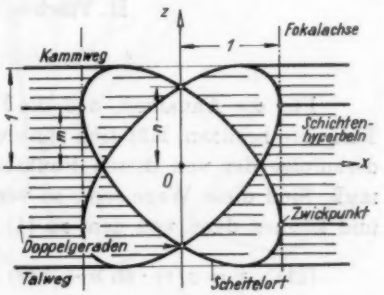

Abb. 1.
Hauptschnitt einer Fläche mit elliptischen Fallinien.

ein, welche L. Eckhart [2] behandelt hat. Hier ist das die Hauptscheitel der Schichtenhyperbeln tragende Ellipsenpaar in der xz-Ebene zu einem Kreis verschmolzen bzw. auf ein Streckenpaar eingeschrumpft. Die Fallinien verlaufen in den Ebenen durch die x-Achse bzw. die y-Achse und sind im ersten Fall durchwegs *Kreise*. Die Fläche (19a) ist im übrigen, wenn man von den zyklischen Gesimsflächen (= Rohrflächen mit ebener Mittellinie) absieht, die einzige Fläche mit Kreisen als Fallinien, wie die Betrachtung der entsprechenden Bedingung $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2$ sofort lehrt. Die Fläche (19b) ist aus einem anderen Grunde bemerkenswert: Sie gestattet eine Fortsetzung über die Schichtenebenen $z = \pm 1$ hinaus und besitzt jenseits dieser Ebenen Ellipsen als Schichtenlinien und Hyperbeln als Fallinien, wird uns also im II. Abschnitt wieder begegnen.

Die Fläche (18) endlich hat die kartesische Gleichung

$$\frac{x^2}{1-z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 0 \tag{20}$$

und kann ersichtlich als Grenzform der Eckhartschen Flächen mit zusammenrückenden Fokalachsen angesehen werden. Der *Schichtenplan* besteht hier aus einem *Strahlbüschel*, ergänzt durch die konzentrischen Orthogonalkreise für die Falliniengrundrisse; die Fallinien selbst verlaufen in den Ebenen durch die x-Achse. Kinematisch entsteht die Fläche aus einem Normalstrahl der z-Achse, der sich gleichförmig um diese Achse dreht und gleichzeitig eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz längs der Achse vollführt; sie gehört mithin zu den „*Umschwungwendelflächen*" W. Kautnys [6], wurde aber, da es sich speziell um den *Darboux-Mannheimschen Umschwung* handelt, auch schon früher von J. Krames [7] betrachtet, ohne daß bisher ihre Fallinieneigenschaft hervorgehoben worden wäre. Die Umschwungbahnen sind durchwegs Ellipsen auf Drehzylindern mit der Achse z und, soweit sie auf unserer Fläche verlaufen, deren Fallinien. Die Fläche wird demnach auch erhalten in der Gesamtheit aller Normalen, die man auf einen Drehzylinder in den Punkten eines ebenen Schrägschnitts errichtet. Man bestätigt ferner leicht, daß die Erzeugenden $u = \text{const}$ allesamt die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ berühren, so daß unsere Fläche ein (gerades) *Kugelkonoid* ist, und zwar jener rationale Sonderfall desselben, der sich auf Grund der Berührung der Leitgeraden z mit der Kugel einstellt. Diese Fläche gehört bekanntlich zu den *Strahlflächen 4. Grades* VII. *Art* nach der Einteilung von R. Sturm. — Die in Rede stehende Fläche ist schließlich noch insofern bemerkenswert, als sie die einzige Fläche mit geraden Schichtenlinien und ebenen Fallinien darstellt, wenn man von den Horizontalzylindern absieht[3]).

II. Flächen mit Hyperbeln als Fallinien.

1. *Unterfall*: *Eigentlicher, reeller Talweg.*

Für die Annahme, daß die Fallhyperbeln im Endlichen Punkte mit waagerechter Tangente besitzen, läßt sich ohne weiteres die Schlußweise aus Abschnitt I übernehmen, derzufolge der von diesen Punkten gebildete *Tal- oder Kammweg horizontal* verlaufen muß. Sind diese Wege *reell*, so verlegen wir sie wieder in die Schichtenebenen $z = \pm 1$ und können dann von dem zu (1) und (3) analogen Ansatz

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) \cdot \operatorname{sh} u + \mathfrak{b}(v) \cdot \operatorname{ch} u + \mathfrak{c}(v) \quad \text{mit} \quad a_3 = 0,\ b_3 = 1,\ c_3 = 0 \tag{21}$$

[3]) Die Frage nach den allgemeinsten *Strahlflächen* mit ebenen Fallinien ist hingegen noch offen. Bestimmt wurden bisher in [4] lediglich die abwickelbaren unter ihnen.

ausgehen[2]). Da das Koordinatennetz auf der Fläche wieder von den Schichten- und Fallinien gebildet wird, ist bloß die Orthogonalitätsbedingung (4) identisch in u zu erfüllen, was auf die Gleichungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}' = 0, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}' = 0, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}' = 0, \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' = 0 \tag{22}$$

hinausläuft. Dieses Gleichungssystem ist in gleicher Weise wie (6) zu behandeln und führt nach Ausschluß der Gesimsflächen auf $\mathfrak{c} = 0$ und zur Feststellung, daß *Tal- und Kammweg Ellipsen* mit den Mittelpunkten $(0, 0, \pm 1)$ sind. Der adäquate Ansatz

$$b_1 = m \cdot \cos v, \quad b_2 = n \cdot \sin v, \quad b_3 = 1 \qquad (m, n = \text{const}) \tag{23}$$

liefert dann für $\mathfrak{a}$:

$$a_1 = n \cdot \cos v, \quad a_2 = m \cdot \sin v, \quad a_3 = 0. \tag{24}$$

Damit ergibt sich für die Fläche die *Parameterdarstellung*:

$$\begin{aligned} x &= (m \operatorname{ch} u + n \operatorname{sh} u) \cos v, \\ y &= (m \operatorname{sh} u + n \operatorname{ch} u) \sin v, \\ z &= \operatorname{ch} u. \end{aligned} \tag{25}$$

Zulassung axialer Streckungen von der z-Achse aus gestattet die Normierung $m^2 - n^2 = 1$ ($m^2 - n^2 = -1$ würde nichts anderes liefern, $m^2 - n^2 = 0$ nur den trivialen Grenzfall von Drehflächen). Verschiebung des Nullpunktes der u-Skala um den durch $\operatorname{ch} \alpha = m$, $\operatorname{sh} \alpha = n$ erklärten Wert α vereinfacht die Flächengleichung schließlich zu

$$x = \operatorname{ch} u \cdot \cos v, \; y = \operatorname{sh} u \cdot \sin v, \; z = \operatorname{ch} (u - \alpha). \tag{26}$$

Im allgemeinen handelt es sich wieder um algebraische *Flächen 8. Ordnung*, aufgebaut aus *Schichtenellipsen* $u = \text{const}$, die im Schichtenplan eine *konfokale Schar*

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = 1$$

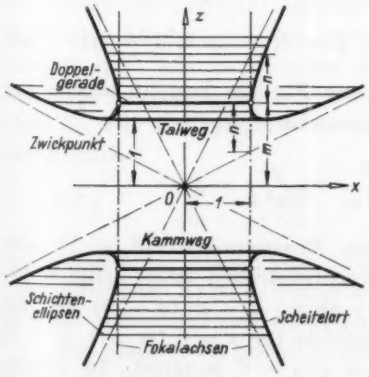

Abb. 2. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Fallinien und reellem Kamm- und Talweg.

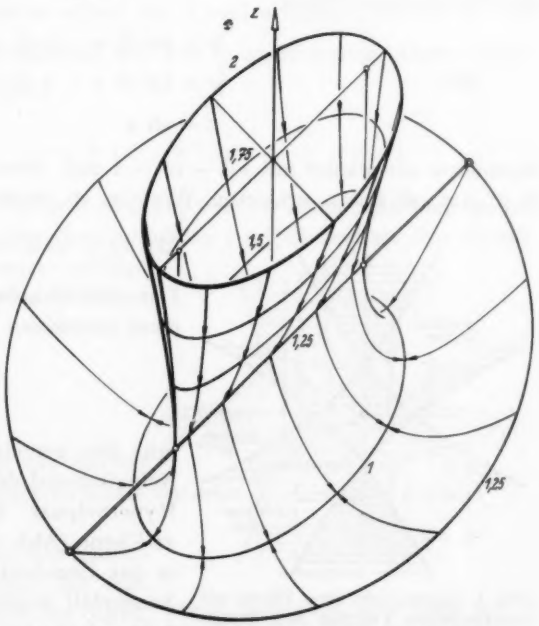

Abb. 3. Kavalierperspektive der Fläche von Abb. 2.

mit den gemeinsamen Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ bilden. Die Hauptscheitel der Schichtenellipsen erfüllen das Hyperbelpaar $x = \pm \operatorname{ch} u$, $z = \operatorname{ch}(u - \alpha)$ in der xz-Ebene (Abb. 2). Ein anschauliches Bild des oberen Flächenmantels zeigt Abb. 3. Die Fallhyperbeln verlaufen in den Tangentialebenen des der Fläche vom Zentrum aus doppelt umschriebenen Berührungskegels 4. Klasse, dessen Schichtenlinie $z = 1$ die Evolute des elliptischen Talwegs (23) ist. — Der Sonderfall $\alpha = 0$ $(m = 1,\ n = 0)$ liefert die äußeren Mäntel $|z| \geqq 1$ jener *Eckhartschen Fläche 4. Ordnung*

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2 - 1} = 1, \tag{27}$$

deren Innenmantel $|z| \leqq 1$ bereits in (19b) auftrat.

2. *Unterfall: Eigentlicher, imaginärer Talweg.*

Besitzen die (reellen) Fallhyperbeln keine reellen Horizontaltangenten, dann fallen *Tal- und Kammweg konjugiert-imaginär* aus und können in die Schichtenebenen $z = \pm i$ verlegt werden. Man erhält die gesuchten Flächen, wenn man auf die Lösungsflächen des 1. Unterfalles vom Ursprung aus die zentrische Ähnlichkeit mit dem Faktor i ausübt. Will man jedoch Betrachtungen im Komplexen vermeiden, so muß man mit dem Ansatz

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) \cdot \operatorname{ch} u + \mathfrak{b}(v) \cdot \operatorname{sh} u + \mathfrak{c}(v) \tag{28}$$

in die allgemeine Bedingung (2) eingehen, wobei von vornherein $a_3 = 0$ angenommen werden darf. Man findet zunächst $b_3' = c_3' = 0$ und kann dementsprechend etwa $b_3 = 1$ und $c_3 = 0$ festsetzen. Damit ist aber bereits gewährleistet, daß die v-Linien die Schichtenlinien sind, und man kommt auf die Orthogonalitätsbedingung (4) zurück, die auch in diesem Fall auf das Gleichungssystem (22) führt, dessen Lösung (23) und (24) zusammen mit $\mathfrak{c} = 0$ unmittelbar übernommen werden kann. Die gesuchte Fläche besitzt mithin die *Parameterdarstellung*

$$\begin{aligned} x &= (m \operatorname{sh} u + n \operatorname{ch} u) \cos v, \\ y &= (m \operatorname{ch} u + n \operatorname{sh} u) \sin v, \\ z &= \operatorname{sh} u. \end{aligned} \tag{29}$$

Normieren wir wieder mit $m^2 - n^2 = 1$ und verschieben wir die u-Skala um den durch $\operatorname{ch} \alpha = m$, $\operatorname{sh} \alpha = n$ erklärten Wert α, so erhalten wir die vereinfachte Darstellung

$$x = \operatorname{sh} u \cdot \cos v,\quad y = \operatorname{ch} u \cdot \sin v,\quad z = \operatorname{sh}(u - \alpha). \tag{30}$$

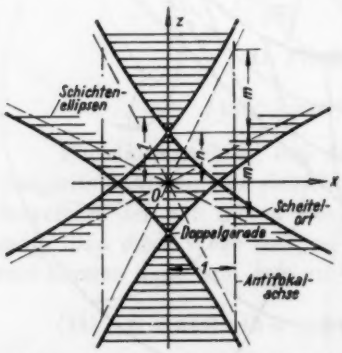

Abb. 4. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Fallinien und imaginärem Kamm- und Talweg.

Der *Schichtenplan* dieser Flächen besteht wieder aus einer *konfokalen Ellipsenschar*

$$\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{ch}^2 u} = 1$$

mit den gemeinsamen Brennpunkten $(0, \pm 1)$. Die Nebenscheitel der Schichtenellipsen selbst erfüllen das Hyperbelpaar $x = \pm \operatorname{sh} u$, $z = \operatorname{sh}(u - \alpha)$ in der xz-Ebene (Abb. 4), welches für $\alpha = 0$ $(m = 1,\ n = 0)$ in das Geradenpaar $x \pm z = 0$ ausartet. In diesem Sonderfall erniedrigt sich die Ordnung der Fläche von acht auf vier und es stellt sich die schon bei Eckhart [2]

erwähnte Fläche

$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2+1} = 1 \tag{31}$$

ein.

3. *Unterfall: Uneigentlicher Talweg.*

Den Übergang zwischen den beiden erledigten Unterfällen bildet die Annahme von Fallhyperbeln mit je einer *waagerechten Asymptote.* Hier eignet sich der Ansatz

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) \cdot u^{-1} + \mathfrak{b}(v) \cdot u + \mathfrak{c}(v) \quad \text{mit} \quad a_3 = 0,\ b_3 = 1. \tag{32}$$

Die allgemeine Bedingung (2) liefert durch Koeffizientenvergleich der niedrigsten Potenz von u die Forderung $(a_1^2 + a_2^2)\, c_3' = 0$, der mit $c_3 = 0$ genügt wird. Damit fallen aber die Schichtenlinien mit den v-Linien zusammen und es bleibt wieder bloß die Orthogonalitätsbedingung (4) des Parameternetzes zu erfüllen, was auf folgendes Gleichungssystem führt:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}' = 0, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}' = 0, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}' = 0, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}' = 0, \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'. \tag{33}$$

Die ersten beiden Gleichungen ziehen nach Ausschluß der Gesimsflächen das Verschwinden von $\mathfrak{c}'$ nach sich, was nach Verschiebung des Koordinatensystems $\mathfrak{c} = 0$ zu setzen erlaubt. Die dritte und vierte Teilgleichung verlangen $\mathfrak{a}^2 = \text{const}$ und $\mathfrak{b}^2 = \text{const}$ und gestatten den Ansatz

$$a_1 = a\cos v, \quad a_2 = a\sin v, \quad b_1 = b\cos w, \quad b_2 = b\sin w \quad \text{mit} \quad a, b = \text{const}. \tag{34}$$

Die letzte Bedingung (33) wird dann in nichttrivialer Weise nur durch

$$w = c - v \tag{35}$$

erfüllt, wobei nach entsprechender Drehung des Koordinatensystems $c = \pi$ genommen werden kann. Durch einfachen Parameterwechsel bei u und unwesentliche affine Verformungen ist schließlich noch die Normierung $a = b = \frac{1}{2}$ zu erreichen. Damit ergibt sich für die Lösungsfläche die Normalform

$$x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})\cos v, \quad y = \frac{1}{2}(u - u^{-1})\sin v, \quad z = u. \tag{36}$$

Auch hier liegt eine algebraische *Fläche* 8. *Ordnung* vor, die einen *Schichtenplan* aus *konfokalen Ellipsen* mit den gemeinsamen Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ besitzt. Die Hauptscheitel der Schichtenellipsen $u = \text{const}$ erfüllen das Hyperbelpaar $\pm 2x = z + z^{-1}$ in der xz-Ebene (Abb. 5). Die *Fallhyperbeln* $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$\frac{x}{\cos v} + \frac{y}{\sin v} = z, \tag{37}$$

welche einen der Fläche vom Ursprung aus doppelt angeschriebenen Kegel 4. Klasse mit regulären Astroiden als Schichtenlinien umhüllen.

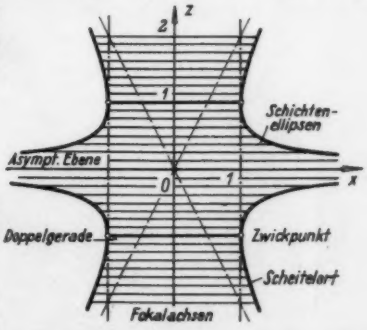

Abb. 5. Hauptschnitt einer Fläche mit hyperbolischen Fallinien und uneigentlichem Talweg.

Die Fläche (36) gestattet nebenbei eine bemerkenswerte *funktionentheoretische Deutung*: Sie läßt sich nämlich auffassen als die *Betragsfläche* der durch

$$2\zeta = \omega + \omega^{-1} \tag{38}$$

definierten komplexen analytischen Funktion $\omega = f(\zeta)$, d. h. als Relief des über der Gaußschen ζ-Ebene aufgetragenen absoluten Betrags von ω. Schreibt man nämlich $\zeta = x + iy$ und $\omega = u \cdot e^{iv}$, so gilt $|\omega| = u$ und die Aufspaltung von (38) in Real- und Imaginärteil führt genau auf die Darstellung (36).

Abschließend sei das Hauptergebnis der Untersuchung festgehalten im

Satz 2. *Abgesehen von den Gesimsflächen mit hyperbolischem Profil sind die Flächen* (26), (30) *und* (36) *und die durch affine Streckung der z-Koordinate daraus ableitbaren die einzigen Flächen, die Hyperbeln zu Fallinien haben.*

III. Flächen mit Parabeln als Fallinien.

1. *Unterfall: Eigentlicher Talweg.*

Unter der Annahme, daß die Fallparabeln Stellen mit horizontaler Tangente haben — was nur bei geneigter Achsenlage möglich ist —, muß der von den Berührungspunkten gebildete *Talweg* natürlich wieder in einer *waagrechten Ebene* verlaufen, die wir mit der Koordinatenebene $z = 0$ identifizieren können. Dementsprechend nehmen wir dann den Ausgang vom Ansatz

$$(39) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) + \mathfrak{b}(v) \cdot u + \mathfrak{c}(v) \cdot u^2 \quad \text{mit } a_3 = b_3 = 0,\ c_3 = 1,$$

welcher, da die Schichtenlinien durch $u = \text{const}$ gekennzeichnet sind, bloß der Orthogonalitätsbedingung (4) zu genügen hat. Diese verlangt die Erfüllung des Gleichungssystems

$$(40) \qquad \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0,\quad 2\mathfrak{a}'\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' = 0,\quad 2\mathfrak{b}'\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}' = 0,\quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = 0.$$

Da $\mathfrak{c}$ die Achsenrichtung der Fallparabel anzeigt, bedeutet die letzte Teilgleichung wegen $\mathfrak{c}^2 = \text{const}$ bei $c_3 = 1$, daß *alle Fallparabeln gleiche Achsenneigung* haben, die im übrigen vermöge affiner Umformung mit 45° normiert werden mag; es soll mithin gelten

$$(41) \qquad c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Zuerst möge der *Sonderfall* erledigt werden, bei welchem alle Fallparabeln sogar die *gleiche Achsenrichtung* haben, die etwa durch $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ festgelegt sei. Die vorletzte Teilgleichung (40) bedingt dann $b_1' = 0$, also $b_1 = 2m = \text{const}$. Die restlichen Bestimmungsgleichungen lauten dann, in Koordinaten geschrieben:

$$(42) \qquad 2ma_1' + b_2 a_2' = 0,\quad 2a_1' + b_2 b_2' = 0.$$

Verwenden wir b_2, oder besser $\frac{b_2}{2}$ als unabhängige Veränderliche v — womit gleichzeitig die Horizontalzylinder ($b_2 = 0$) ausgeschlossen werden — so erhalten wir das Lösungssystem

$$(43) \qquad \begin{aligned} a_1 &= m^2 - v^2,\quad a_2 = 2mv,\quad a_3 = 0; \\ b_1 &= 2m,\quad b_2 = 2v,\quad b_3 = 0. \end{aligned}$$

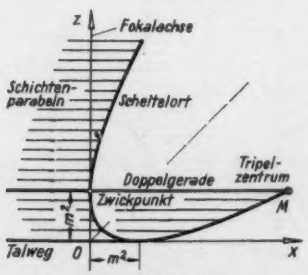

Abb. 6.
Hauptschnitt einer Steinerfläche mit achsenparallelen Fallparabeln.

Die Integrationskonstanten wurden dabei mit Rücksicht auf zulässige Koordinatenverschiebungen passend festgesetzt. Die gesuchte Fläche besitzt demnach die folgende *Parameterdarstellung*:

$$(44) \qquad x = (u + m)^2 - v^2,\quad y = 2v(u + m),\quad z = u^2.$$

Der zugehörige *Schichtenplan* besteht aus *konfokalen Parabeln* mit dem Ursprung als gemeinsamem Brenn-

punkt; unter ihnen findet sich für $u = 0$ auch der *Talweg* $y^2 = 4m^2(m^2 - x)$. Die Scheitel der Schichtenparabeln selbst verteilen sich auf die Profilkurve $x = (u + m)^2$, $z = u^2$ in der Symmetrieebene $y = 0$, also für $m \neq 0$ auf eine *Parabel* (Abb. 6), für $m = 0$ auf eine *Gerade*.

Die für $m \neq 0$ vorliegende (etwa mit $m = 1$ zu normierende und in Abb. 7 anschaulich dargestellte) *Fläche 4. Ordnung* kann als Grenzform der Flächen aus Satz 1 und 2 angesehen werden, wenn eine der Fokalachsen ins Unendliche rückt; sie wurde bereits in [4] und [5] betrachtet und daselbst als *Steinersche Römerfläche* erkannt[4]). Die Fallparabeln $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen $v(z - x) + my = v^3 + m^2 v$, die einen der Fläche umschriebenen Zylinder 3. Klasse mit der Erzeugendenrichtung $1 : 0 : 1$ und der Evolute der Talwegparabel $z = 0$ als Basis einhüllen. — Für $m = 0$ reduziert sich die Fläche auf einen *Reyeschen Kegel 2. Grades*

$$y^2 = 4z(z - x), \tag{45}$$

der die xy-Ebene längs der x-Achse (= Talweg) berührt und einen Fokalstrahl in der z-Achse hat. Seine Fallinien sind die in den untereinander parallelen Ebenen $x - z = \text{const}$ gelegenen Parabeln.

Wenden wir uns nach dieser Einschaltung nunmehr wieder dem *allgemeinen Fall* mit *veränderlicher Achsenrichtung* der Fallparabeln zu. Hier liegt es nahe, die Bedingung (41) durch

$$c_1 = \cos v, \quad c_2 = \sin v \tag{46}$$

zu erfüllen, also als Parameter v die Achsenrichtung im Grundriß einzuführen. Das Gleichungssystem (40) lautet dann:

$$\begin{aligned} &a_1' b_1 + a_2' b_2 &&= 0, \\ &b_1 b_1' + b_2 b_2' + 2(a_1' \cos v + a_2' \sin v) &&= 0, \\ &-b_1 \sin v + b_2 \cos v + 2(b_1' \cos v + b_2' \sin v) &&= 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Da für die vier unbekannten Funktionen nur drei Gleichungen vorliegen, darf noch eine zusätzliche Relation eingeführt werden. Wir schreiben zweckmäßig die Kombination

$$b_1 \cos v + b_2 \sin v = h(v) \tag{48}$$

mit beliebiger (zweimal differenzierbarer) Funktion $h(v)$ vor. Vergleich der Ableitung mit der letzten Gleichung (47) liefert dann die Darstellung

$$b_1 = h \cos v - 2h' \sin v, \quad b_2 = h \sin v + 2h' \cos v. \tag{49}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen (47) erhält man anschließend unter der Voraussetzung $h' \neq 0$ — welche die Gesimsflächen ausschließt —

$$\begin{aligned} a_1' &= -\left(\frac{h}{4} + h''\right)(h \sin v + 2h' \cos v), \\ a_2' &= \left(\frac{h}{4} + h''\right)(h \cos v - 2h' \sin v), \end{aligned} \tag{50}$$

und durch Integration

$$a_1 = \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \cos v - hh' \sin v, \quad a_2 = \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right) \sin v + hh' \cos v. \tag{51}$$

[4]) Die Fläche berührt nämlich die Fernebene, die Schichtenebene $z = 0$, sowie die beiden durch die Fokalachse legbaren Minimalebenen $x \pm iy = 0$ längs Kegelschnitten, was zu ihrer Identifizierung ausreicht.

Damit sind wir zu einer *integralfreien Darstellung aller Lösungsflächen* gelangt:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right)\cos v - hh'\sin v + u(h\cos v - 2h'\sin v) + u^2\cos v, \\ y &= \left(\frac{h^2}{4} - h'^2\right)\sin v + hh'\cos v + u(h\sin v + 2h'\cos v) + u^2\sin v, \\ z &= u^2. \end{aligned} \tag{52}$$

Die Bauart der ersten beiden Gleichungen verlockt dazu, die Koordinaten x und y zu einer komplexen Größe $\zeta = x + iy$ zusammenzufassen. Man erhält damit die überraschend einfache Beziehung

$$\zeta = x + iy = \left(\frac{h}{2} + ih' + u\right)^2 e^{iv}, \tag{53}$$

die als komplexe Darstellung des *Schichtenplans* verwendbar ist. Die Tatsache, daß die in u quadratische Gleichung $x + iy = 0$ eine Doppelwurzel besitzt, bedeutet geometrisch, daß der durch den Ursprung O gehende Minimalstrahl $x + iy = 0$ den Grundriß jeder Fallparabel $v = \text{const}$ berührt, woraus zusammen mit der analogen Feststellung für $x - iy = 0$ folgt, daß *alle Fallparabelgrundrisse den Ursprung zum gemeinsamen Brennpunkt* haben. Die z-Achse tritt mithin wieder als *Fokalachse* der Fläche auf.

Im Hinblick darauf, daß ζ und z reine Quadrate sind, liegt es nahe, neben der Lösungsfläche Φ noch jene Fläche Φ^* zu betrachten, die durch

$$\zeta^* = x^* + iy^* = \left(\frac{h}{2} + ih' + u\right)e^{\frac{iv}{2}}, \quad z^* = u \tag{54}$$

beschrieben wird; das ist ausführlich:

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{h}{2} + u\right)\cos\frac{v}{2} - h'\cdot\sin\frac{v}{2}, \\ y^* &= \left(\frac{h}{2} + u\right)\sin\frac{v}{2} + h'\cdot\cos\frac{v}{2}, \\ z^* &= u. \end{aligned} \tag{55}$$

Auch auf dieser *Hilfsfläche* Φ^* besteht das Parameternetz aus den Schichtenlinien ($u = \text{const}$) und den Fallinien ($v = \text{const}$), da die Orthogonalitätsbedingung $\mathfrak{x}_u^* \mathfrak{x}_v^* = 0$ erfüllt ist; da die *Fallinien* jedoch *Geraden* sind ($\mathfrak{x}^*$ linear in u!), handelt es sich bei Φ^* um eine *Böschungstorse*, und zwar von 45° Neigung. Sie kann als Einhüllende der Ebenenschar

$$x^*\cos\frac{v}{2} + y^*\sin\frac{v}{2} - z^* = \frac{h}{2} \tag{56}$$

erhalten werden, womit die Funktion $h(v)$ eine einfache geometrische Deutung erfährt.

Der Zusammenhang zwischen den Flächen Φ^* und Φ wird durch eine *rationale Punkttransformation* $\mathfrak{T} = P^* \to P$ vermittelt, die wegen $\zeta = \zeta^{*2}$ durch

$$x = x^{*2} - y^{*2},\ y = 2x^*y^*,\ z = z^{*2} \tag{57}$$

beschrieben wird. Sie weist jedem Punkt P^* einen einzigen Punkt P zu, während umgekehrt jeder Punkt P aus acht Punkten P^* hervorgeht, von denen für $z > 0$ vier reell und vier imaginär sind: dem Punkt (x^*, y^*, z^*) treten gleichberechtigt noch die Punkte $(x^*, y^*, -z^*)$, $(-x^*, -y^*, \pm z^*)$, $(iy^*, -ix^*, \pm z^*)$ und $(-iy^*, ix^*, \pm z^*)$ zur Seite.

$\mathfrak{T}$ verwandelt gerade Linien l^* in Parabeln l, wobei deren Achsenneigung γ mit der Geradenneigung γ^* durch $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\gamma^*$ verknüpft ist. Wird eine Figur $\mathfrak{F}^*$ vom Ursprung aus im Verhältnis $\mu : 1$ zentrisch-ähnlich verändert, so erfährt die entsprechende Figur $\mathfrak{F}$ eine zentrisch-ähnliche Veränderung im Maßstab $\mu^2 : 1$; Drehung von $\mathfrak{F}^*$ um die z-Achse bewirkt eine Drehung von $\mathfrak{F}$ um den doppelten Betrag. Diese Bemerkung erlaubt es, zu transformierende Gebilde in einer bequemen Normallage vorauszusetzen. — Die Transformation $\mathfrak{T}$ mag in zwei Schritte zerlegt werden:

1. Die durch $\zeta = \zeta^{*2}$ erklärte Verwandtschaft $\mathfrak{U}$, welche im Grundrißfeld wie in allen Schichtenebenen die gleiche *konforme Abbildung* vollzieht; diese wohlbekannte ebene Abbildung ist einvierdeutig und quadratisch und verwandelt Geraden in Parabeln, die ihren Brennpunkt im Nullpunkt haben, ferner Kreise in Pascalschnecken.

2. Die bei unverändertem Grundrißfeld durch $z = z^{*2}$ definierte einzweideutige Verwandtschaft $\mathfrak{B}$, welche nur die Höhenverteilung der Schichtenebenen beeinflußt; sie führt geneigte Raumgeraden in Parabeln mit lotrechter Achse über, die die Grundebene $z = 0$ berühren.

Diese Zusammensetzung $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ läßt unmittelbar erkennen, daß dem Schichten- und Falliniennetz einer beliebigen Fläche das gleichartige Netz auf der entsprechenden Fläche zugeordnet wird, womit die tiefere geometrische Ursache für den Zusammenhang unserer Flächen Φ mit den Böschungstorsen Φ^* — den Flächen mit geraden Fallinien — aufgedeckt erscheint. Nunmehr ist auch klar, daß eine Fläche mit parabolischen Fallinien nach festgelegter *Fokalachse* z im wesentlichen durch ihren *Talweg* bestimmt ist, der beliebig vorgeschrieben werden darf:

Satz 3. *Um eine von einer Gesimsfläche verschiedene Fläche Φ mit Parabeln als Fallinien zu ermitteln, deren Talweg w in der xy-Ebene gegeben ist und deren Fokalachse in der z-Achse liegt, bilde man w vermöge $x + iy = (x^* + iy^*)^2$ konform ab, lege durch die so erhaltene Linie w^* eine Böschungstorse Φ^* und transformiere dieselbe mit Hilfe der Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ (57) zurück.*

Um einfache *Beispiele* zu gewinnen, kann man auch unmittelbar von einfachen Böschungstorsen Φ^* ausgehen. Wählen wir im einfachsten Fall als Böschungstorse eine *Ebene* Π^*, etwa die Ebene $x^* - z^* = m$, so gelangen wir über die Parameterdarstellung

$$x^* = u + m, \qquad y^* = v, \qquad z^* = u \tag{58}$$

vermöge (57) genau zu dem Sonderfall (44) einer *Steinerfläche* Π mit achsenparallelen Fallparabeln (Abb. 7) bzw. (für $m = 0$) zum *Reyekegel* (45)[5]).

Als nächstes Beispiel einer Böschungstorse betrachten wir noch einen *Drehkegel* Δ^* mit lotrechter Achse, darstellbar durch

$$x^* + iy^* = m + (u + n)e^{\frac{iv}{2}}, \qquad z^* = u, \qquad (m \neq 0). \tag{59}$$

Die mittels der Transformation $\mathfrak{T}$ daraus abgeleitete Fläche Δ — die vermöge (52) aus der Annahme $h(v) = 2\left(m\cos\frac{v}{2} + n\right)$ hervorgehen würde — besitzt die komplexe Parameterdarstellung

$$x + iy = m^2 + 2m(u + n)e^{\frac{iv}{2}} + (u + n)^2 e^{iv}, \qquad z = u^2 \tag{60}$$

[5]) Den ∞^2 Geraden l^* der Ebene Π^* entsprechen ∞^2 Parabeln l auf der Fläche Π, was neuerlich bestätigt, daß im allgemeinen eine Römerfläche vorliegen muß.

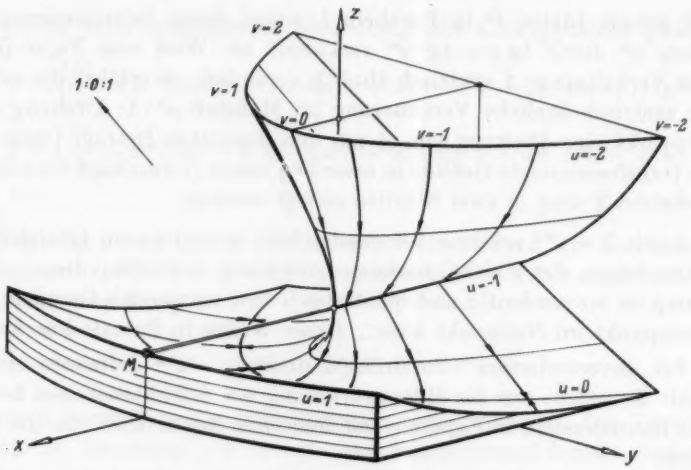

Abb. 7. Axonometrische Darstellung der Steinerfläche Π gemäß Abb. 6.

und ist offenbar dadurch ausgezeichnet, daß die *Fallparabeln einen gemeinsamen Punkt* besitzen, nämlich den der Kegelspitze $S^*(m, 0, -n)$ entsprechenden Punkt $S(m^2, 0, n^2)$. Der *Schichtenplan* besteht aus konzentrischen und konfokalen *Pascalschnecken*. Für $n \neq 0$ ist die Fläche Δ von 8. Ordnung und besitzt als Talweg $u = 0$ eine der Pascalschnecken des Schichtenplans. Die Ebenen der Fallparabeln umhüllen einen Kegel 4. Klasse mit der Spitze S und der Talwegevolute als Basis. — Besonders hervorzuheben ist die zu $n = 0$ gehörige Fläche 4. Ordnung Δ_0, bei welcher der Talweg auf einen punktförmigen „*Talkessel*" an der Stelle $S(m^2, 0, 0)$ zusammengeschrumpft ist. Die *Fallparabeln* $v = \text{const}$ verteilen sich in diesem Sonderfall auf das *Ebenenbüschel* $x + z - m^2 = y \cdot \operatorname{ctg} \frac{v}{2}$. Von diesem Gesichtspunkt her wurde die Fläche Δ_0 bereits in [5] untersucht und als eine zu Π affine *Römerfläche* erkannt, die ihr Tripelzentrum in S hat. Sie läßt sich im übrigen, wie aus der Darstellung (60) leicht hervorgeht, ähnlich wie die Fläche (36) als *Betragsfläche* der komplexen analytischen Funktion

$$\omega = (m \pm \sqrt{\zeta})^2 \tag{61}$$

auffassen.

Bei allen weiteren Annahmen wird die Torse Φ^* eine nichtausgeartete *Gratlinie* besitzen, die in transformierter Gestalt auch bei der Fläche Φ wiederzufinden ist und von allen Fallparabeln berührt wird. Hier kann beispielsweise die *Spiralfläche* mit ebenen Fallinien angeführt werden [3], die aus einer *Spiraltorse* Φ^* mit der Achse z und dem Fixpunkt O hervorgeht; die Gratlinien sind bei Ausgangs- und Endfläche naturgemäß Bahnspiralen („zylindro-konische Spiralen"), während als Talweg eine logarithmische Spirale auftritt. — Da im übrigen jede beliebige Böschungstorse Φ^* als Einhüllende von ∞^1 gleichgeneigten Ebenen Π^* erzeugt werden kann, so kann die entsprechende Fläche Φ auch als *Einhüllende einer einparametrigen Schar ähnlicher Steinerflächen* Π (s. o.) entstehen, wobei die Fallparabeln als Charakteristiken auftreten.

2. *Unterfall: Uneigentlicher Talweg.*

Bei *waagerechter Achsenlage* der Fallparabeln tritt kein eigentlicher Talweg auf. Geht man statt dessen von der „Basisschichtenlinie" in der xy-Ebene aus, so braucht

der Ansatz (39) nur geringfügig modifiziert zu werden:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(v) + \mathfrak{b}(v) \cdot u + \mathfrak{c}(v) \cdot u^2 \quad \text{mit} \quad a_3 = c_3 = 0, \quad b_3 = 1. \tag{62}$$

Da auch jetzt die v-Linien die Schichtenlinien sind, ist nur die Orthogonalitätsbedingung (4) zu erfüllen, und diese führt wiederum auf das Gleichungssystem (40), dessen Auflösung unmittelbar übernommen werden kann.

So ist im *Sonderfall* der Fallparabeln *gleicher Achsenrichtung* ($c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$) in der Darstellung (44) nur die letzte Teilgleichung durch $z = u$ zu ersetzen. Mittels Parameter- und Höhenverschiebung gelangt man zu der vereinfachten Darstellung

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u \tag{63}$$

der Lösungsfläche, deren kartesische Gleichung

$$y^2 = 4z^2(z^2 - x) \tag{64}$$

schon bei L. Eckhart [2] erwähnt erscheint. Es handelt sich um eine interessante Grenzform einer *Steinerschen Römerfläche* (vgl. Abb. 8), deren zahlreiche merkwürdige Eigen-

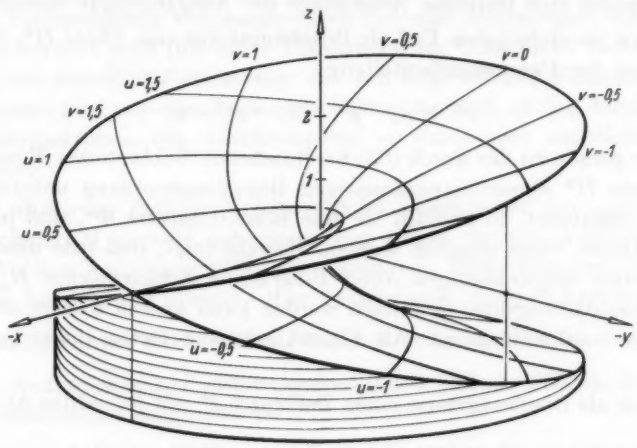

Abb. 8. Axonometrische Darstellung der Eckhartschen Fläche Π_0.

schaften in [5] dargelegt worden sind. Der *Schichtenplan* besteht wie bei der Fläche Π (44) aus *konfokalen Parabeln*, die Fallparabeln ($v = \text{const}$) verteilen sich auf das Ebenenbüschel um die x-Achse. Vermerkt sei hier nur noch, daß die Fläche wegen der Beziehung

$$\zeta = x + iy = (u + iv)^2 \tag{65}$$

als *Riemannsche Fläche* der komplexen analytischen Funktion $\omega = \sqrt{\zeta}$ aufgefaßt werden kann, deren über der ζ-Ebene aufgetragenen Realteil $z = \text{Re}\ \omega = u$ sie repräsentiert.

Für die *allgemeinen Lösungsflächen* (mit veränderlicher Achsenrichtung der Fallparabeln) ist die integrallose, eine willkürliche Hilfsfunktion $h(v)$ benützende Darstellung (52) lediglich durch Abänderung der Höhenkote auf $z = u$ zu modifizieren. In komplexer Schreibweise haben wir also für die von Gesimsflächen verschiedenen Flächen mit Fallparabeln horizontaler Achsenlage die nachstehende *Parameterdarstellung*:

$$\zeta = x + iy = \left(\frac{h}{2} + ih' + u\right)^2 e^{iv}, \quad z = u. \tag{66}$$

Die z-Achse ist auch hier *Fokalachse*, das heißt, die sie enthaltenden Minimalebenen $x \pm iy = 0$ berühren alle Fallparabeln, so daß deren Grundrisse den Ursprung zum gemeinsamen Brennpunkt haben.

Betrachten wir neben der Lösungsfläche Φ (66) die durch (54) definierte *Böschungstorse* Φ^*: Der Zusammenhang wird jetzt durch die oben erklärte *rationale Punkttransformation* $\mathfrak{U} = P^* \to P$ vermittelt, die in jeder Schichtenebene bei unveränderter Höhe die konforme Abbildung $\zeta = \zeta^{*2}$ bewirkt und dementsprechend die kartesische Darstellung

$$x = x^{*2} - y^{*2}, \quad y = 2x^* y^*, \quad z = z^* \tag{67}$$

besitzt. $\mathfrak{U}$ verwandelt schräge Raumgeraden l^* in Parabeln l mit waagerechter Hauptachse und der Fokalachse z.

Satz 4. *Die von Gesimsflächen verschiedenen Flächen Φ mit Parabeln waagerechter Achsenlage als Fallinien können mittels der Transformation $\mathfrak{U}$ (67) aus beliebigen Böschungstorsen Φ^* abgeleitet werden.*

Verschraubung der Torse Φ^* um die z-Achse zieht auch eine Verschraubung der Fläche Φ (mit gleicher Schub- und verdoppelter Drehkomponente) nach sich, was in den folgenden *Beispielen* eine bequeme Normallage der Ausgangsfigur anzunehmen erlaubt.

Wählen wir im einfachsten Fall als Böschungstorse eine *Ebene* Π^*, etwa die Ebene $x^* - z^* = 0$ mit der Parameterdarstellung

$$x^* = u, \quad y^* = v, \quad z^* = u, \tag{68}$$

so gelangen wir gerade zu der durch (63) beschriebenen *Eckhartschen Römerfläche* Π_0. — Wird eine Ebene Π^* einem einparametrigen Bewegungsvorgang unterworfen, der die z-Achse in sich überführt, so umhüllt sie eine Böschungstorse Φ^*, und jede Böschungstorse kann in dieser Weise erhalten werden. Hieraus folgt, daß jede unserer Flächen Φ als *Hüllfläche einer einparametrigen Schar kongruenter Eckhartflächen* Π_0 mit derselben Fokalachse (Kuspidaltangente) gewonnen werden kann und in diesem erweiterten Sinn als „*Bewegfläche*" aufzufassen ist. Als Charakteristiken treten dabei gerade die Fallparabeln auf.

Wählen wir als Böschungstorse einen *Drehkegel* Δ^* mit lotrechter Achse, darstellbar durch

$$x^* + iy^* = m + ue^{\frac{iv}{2}}, \quad z^* = u, \quad (m \neq 0), \tag{69}$$

dann erhalten wir vermöge $\mathfrak{U}$ eine *Fläche 8. Ordnung* Δ mit der Parameterdarstellung

$$x + iy = m^2 + 2mue^{\frac{iv}{2}} + u^2 e^{iv}, \quad z = u. \tag{70}$$

Der *Schichtenplan* besteht wie bei der oben besprochenen Fläche 4. Ordnung $\Delta_0 (= \mathfrak{B}\Delta)$ aus konzentrischen und konfokalen *Pascalschnecken*. Die Fallparabeln $v = \text{const}$ gehen sämtlich durch den *konischen Knotenpunkt* $S(m^2, 0, 0)$ der Fläche und verlaufen in den Ebenen

$$(x - m^2) \sin v - y \cos v = 2mz \cdot \sin \frac{v}{2}, \tag{71}$$

die einen von S ausstrahlenden Berührungskegel der Fläche einhüllen, dessen Schichtenlinien sich als zweispitzige Epizykloiden erweisen. — Auch Δ ist eine *Betragsfläche*, nämlich für die Funktion

$$\omega = m \pm \sqrt{\zeta}. \tag{72}$$

Für jede weitere Annahme einer Böschungstorse Φ^* tritt eine nichtausgeartete *Gratlinie* auf, die entsprechend transformiert auch bei der zugehörigen Fläche Φ erscheint. Hier wäre beispielsweise die *Müllersche Schraubfläche* mit ebenen Fallinien anzuführen [1], die aus einer *Schraubtorse* Φ^* mit der Achse z hervorgeht; die auftretende Gratlinie ist naturgemäß eine Bahnschraublinie.

IV. Zusammenfassung.

Die Frage nach allen *Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien* wurde durch die voranstehenden Untersuchungen vollständig beantwortet. Nach Ausschluß der trivialen Lösungen, bestehend aus *Gesimsflächen* mit lotrechtem Evolutenzylinder und Kegelschnittprofil — Drehflächen und Horizontalzylinder als Grenzfälle inbegriffen — verbleiben für das Auftreten von Mittelpunktskegelschnitten als Fallinien nur mehr wenige, verhältnismäßig scharf umrissene Flächentypen, deren Schichtenlinien gleichfalls Kegelschnitte sind, während die Flächen mit Parabeln als Fallinien eine ziemlich ausgedehnte Familie bilden, in die noch eine willkürliche Funktion eingeht und welche Schichtenlinien beliebiger Form besitzen können. Charakteristisch für die nichttrivialen Lösungsflächen ist das Vorhandensein von *waagerechten Tal- oder Kammwegen*, längs welchen eine Schichtenebene berührt wird (die unter Umständen ins Unendliche rücken kann), sowie das Auftreten von *lotrechten Fokalachsen*; das von einer solchen Fokalachse ausgehende Minimalebenenpaar wird von allen Fallkegelschnitten berührt, so daß deren Grundrisse — die Orthogonaltrajektorien des Schichtenplans — einen oder sämtliche Brennpunkte gemeinsam haben.

Im Falle *elliptischer Fallinien* erhält man im wesentlichen die zu einem Schichtenplan aus konfokalen Hyperbeln gehörigen, von einem einzigen Formparameter α abhängigen ∞^1 *Flächen* 8. *Ordnung* (17), wenn man von Maßstabänderungen und affinen Streckungen in Lotrichtung absieht. Hier ordnen sich, doppelt überdeckt, für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die bekannten *Eckhartschen Flächen* 4. *Ordnung* (19a, b) ein, ferner ist noch als Grenzform die *Darbouxsche Umschwungwendelfläche* (20) anzuführen, deren Schichtenplan in ein Strahlbüschel ausgeartet ist.

Im Falle *hyperbolischer Fallinien* stellen sich analog die zu einem Schichtenplan aus konfokalen Ellipsen gehörigen *Flächen* 8. *Ordnung* ein, wobei jedoch hinsichtlich der Realitätsverhältnisse *drei Typen* (26), (30) und (36) zu unterscheiden sind, welche durch einen reellen, imaginären bzw. uneigentlichen Talweg gekennzeichnet sind. Neben der bereits genannten Eckhartschen Fläche 4. Ordnung (19b) — die sowohl Ellipsen als auch Hyperbeln zu Fallinien hat — stellt sich als (doppelt überdeckte) Sonderform noch die *dritte Eckhartfläche* (31) ein.

Besitzt eine Fläche *parabolische Fallinien*, so weisen dieselben durchwegs die gleiche Achsenneigung gegen die Horizontale auf. Legt man die stets vorhandene Fokalachse in die z-Achse und den allfälligen Talweg in die xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, so läßt sich die Fläche mittels einer einfachen *rationalen Punkttransformation* $\mathfrak{T}$ (57) oder $\mathfrak{U}$ (67) aus einer *Böschungstorse* ableiten. Hierauf beruhen im Grunde die integrallosen Darstellungen (52) bzw. (66) der in Rede stehenden Flächen, in welche eine willkürliche Funktion $h(v)$ eingeht. Umgekehrt transformiert $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{U}$ jede beliebige Böschungstorse in eine Fläche mit Fallparabeln, die dabei den Torsenerzeugenden entsprechen; Anwendung von $\mathfrak{T}$ liefert Flächen mit eigentlichem Talweg, Anwendung von $\mathfrak{U}$ solche mit Fallparabeln waagerechter Achsenlage, also ohne eigentlichen Talweg. Insonderheit

gehen aus schrägen *Ebenen* spezielle *Römerflächen* (44) bzw. (63) hervor, die als Grenzformen der Flächen mit elliptischen oder hyperbolischen Fallinien anzusehen sind, da sie Parabeln zu Schichtenlinien haben.

Unter den besonderen Beispielen wurden die Flächen (36), (60) und (70) hervorgehoben, die sich als *Betragsflächen* komplexer analytischer Funktionen deuten lassen. Die nicht uninteressante Frage nach den allgemeinsten Funktionen $\omega = f(\zeta)$, deren Betragsflächen durch ebene Fallinien ausgezeichnet sind, bleibt einer eigenen Abhandlung vorbehalten.

Literatur.

[1] *E. Müller*, Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **120** (1911), 1763—1810, insb. 1797.

[2] *L. Eckhart*, Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **131** (1922), 417—427.

[3] *W. Wunderlich*, Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Monatsh. Math. Phys. **46** (1938), 248—265, insb. 255.

[4] *W. Wunderlich*, Flächen mit ebenen Fallinien. Monatsh. Math. **65** (1961), 291—300.

[5] *W. Wunderlich*, Römerflächen mit ebenen Fallinien. Annali mat. pura appl. (im Druck).

[6] *W. Kautny*, Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63** (1960), 169—188.

[7] *J. Krames*, Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes. Monatsh. Math. Phys. **46** (1937), 38—50, insb. 47.

Eingegangen 27. Dezember 1960.